Agrégation externe de mathématiques 2027
Programme détaillé de l'écrit

Mode d'emploi. Pour chaque point du programme officiel (rappelé en italique), on liste : les *définitions* à connaître, les *résultats* à savoir énoncer, les *savoir-faire* attendus en problème, des *exemples et contre-exemples* de référence et, quand les rapports en signalent, les *pièges relevés par le jury*. Chaque élément porte un numéro qui suit la structure du programme (par exemple 2.a.7 ou 1.2.c.4), pour suivre sa progression.

Marqueurs.

- ★ démonstration classique à savoir refaire sans aide ;
- † pas écrit dans le programme officiel, mais cité par le jury comme pertinent ou classique en cours de licence ;
- HP « déborde du programme » selon le jury : culture utile, pas une exigence ;
- [jury : ...] point commenté dans un rapport du jury 2020–2025 : « écrit MG AAAA » renvoie au sujet de mathématiques générales de l'année AAAA, « écrit AP AAAA » au sujet d'analyse et probabilités, « leçon N » au commentaire de la leçon d'oral N (ces commentaires précisent les attendus sur le programme commun à l'écrit et à l'oral). Sans autre précision, il s'agit du rapport 2025 ; « leçon N, rapport AAAA » signale une remarque qui ne figure que dans un rapport plus ancien, la leçon étant toujours désignée par son numéro actuel (liste 2026) ; « option A, B ou C » renvoie aux recommandations 2025 pour l'épreuve de modélisation.

Niveaux (où la notion est vue pour la première fois dans un cursus classique) :

- [L1] MPSI ou L1 ;
- [L2] MP ou L2 ;
- [L3] licence 3 ;
- [M1] master 1 ou préparation à l'agrégation.

Les niveaux L1 et L2 sont vérifiés sur les programmes officiels de MPSI (2021) et de MP (2021, en vigueur depuis 2022). Une notion vue en prépa avec la mention « démonstration non exigible » y est notée L1 ou L2 : à l'agrégation, sa démonstration peut en revanche être attendue (★). Les niveaux L3 et M1 sont indicatifs : ils varient selon les universités.

Sources. Programmes officiels de CPGE (dossier `programme/references-cpge`) ; rapports du jury de l'agrégation externe 2020 à 2025 (dossier `rapports`, téléchargés depuis `https://agreg.org`). Ce détail n'est pas un document officiel : en cas de doute, c'est le texte du programme qui fait foi.

Table des matières

1 Algèbre linéaire **3**
- 1.1 Espaces vectoriels . . . 3
- 1.2 Espaces vectoriels de dimension finie . . . 5

2 Groupes **10**
- 2.a Généralités, sous-groupes, quotients, actions . . . 10
- 2.b Groupes cycliques, abéliens finis, racines de l'unité . . . 12
- 2.c Groupe symétrique . . . 13
- 2.d Groupes classiques . . . 14

3 Anneaux, corps et polynômes **15**
3.a Anneaux, idéaux, quotients . . . 15
3.b Polynômes . . . 16
3.c Corps, extensions, corps finis . . . 17
3.d Divisibilité, anneaux factoriels, principaux, euclidiens . . . 18
3.e Congruences, nombres premiers, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . 19
3.f Fractions rationnelles . . . 20

4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel **21**
4.a Formes bilinéaires, formes quadratiques . . . 21
4.b Orthogonalité, réduction, classification . . . 22
4.c Espaces euclidiens et hermitiens . . . 22
4.d Groupe orthogonal, endomorphismes remarquables, réduction . . . 23
4.e Groupe unitaire, endomorphismes normaux . . . 25

5 Géométries affine et euclidienne **25**
5.a Espaces affines, barycentres, convexité . . . 26
5.b Isométries et similitudes . . . 27
5.c Angles en dimension deux . . . 27
5.d Figures du plan et de l'espace, nombres complexes . . . 28
5.e Coniques et quadriques . . . 28

6 Analyse à une variable réelle **29**
6.1 Nombres réels . . . 29
6.2 Séries numériques . . . 30
6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles . . . 31
6.4 Fonctions usuelles . . . 33
6.5 Intégration . . . 34
6.6 Suites et séries de fonctions . . . 35
6.7 Convexité . . . 36

7 Analyse à une variable complexe **37**
7.1 Séries entières . . . 37
7.2 Fonctions d'une variable complexe . . . 39

8 Topologie **42**
8.1 Topologie et espaces métriques . . . 42
8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . 45
8.3 Espaces de Hilbert . . . 47

9 Calcul différentiel **48**
9.1 Fonctions différentiables . . . 49
9.2 Équations différentielles . . . 52
9.3 Géométrie différentielle . . . 54

10 Calcul intégral **55**
10.1 Notions de théorie de la mesure . . . 56
10.2 Intégration . . . 56
10.3 Analyse de Fourier . . . 59

11 Probabilités et statistiques **61**
11.1 Espace probabilisé . . . 61
11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire . . . 62
11.3 Convergences de suites de variables aléatoires . . . 63
11.4 Statistiques . . . 64

12 Méthodes numériques **65**
12.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires 66
12.2 Méthodes itératives de résolution approchée 66
12.3 Intégration numérique 67
12.4 Approximation de fonctions numériques 68
12.5 Équations différentielles ordinaires 68

1 Algèbre linéaire

Bilan des rapports du jury 2020–2025. L'algèbre linéaire est présente dans tous les sujets de mathématiques générales : noyau, rang, valeurs propres et diagonalisation (écrit MG 2020, exercice 1, réussi entièrement par moins de 20 % des candidats) ; théorème de la base échelonnée, déterminant de Vandermonde, inverse d'une matrice à coefficients dans un anneau (écrit MG 2021) ; endomorphismes nilpotents, réduction de Jordan, décomposition en valeurs singulières (écrit MG 2023) ; trigonalisation simultanée, sous-algèbres commutatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (écrit MG 2024) ; matrices compagnons, polynômes caractéristique et minimal (écrit MG 2025). En 2025, le jury indique que les « acquis les plus essentiels » suffisaient à l'admissibilité : démontrer qu'une famille est une base, écrire la matrice d'un endomorphisme dans cette base et en déduire son polynôme caractéristique ou minimal, déterminer un noyau, utiliser la théorie de la dimension. Il relève aussi, depuis 2020, une « très nette perte de maîtrise » de la réduction et une mauvaise compréhension du changement de base.

1.1 Espaces vectoriels

1.1.a Espaces vectoriels, applications linéaires, sommes, quotients

Texte officiel : Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$.

Définitions

1.1.a.1 [L1] Espace vectoriel, sous-espace vectoriel, sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(A)$; application linéaire, $\mathcal{L}(E,F)$, isomorphisme ; noyau, image.

1.1.a.2 [L1] Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.

1.1.a.3 [L1] Somme et somme directe de deux sous-espaces ; sous-espaces supplémentaires ; projecteurs et symétries associés.

1.1.a.4 [L2] Somme et somme directe d'une famille finie $F_1, \dots, F_p$: la somme est directe si $x_1 + \cdots + x_p = 0$ avec $x_i \in F_i$ impose $x_i = 0$ pour tout i.

1.1.a.5 [L1] Familles libres, génératrices, bases (familles finies) ; extension aux familles quelconques [L3] .

1.1.a.6 [L3] Espace quotient E/F, surjection canonique $\pi : E \to E/F$; codimension [†].

1.1.a.7 [L2] Algèbre (unitaire) sur un corps ; l'algèbre $\mathcal{L}(E)$; groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ des inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

Résultats

1.1.a.8 [L1] Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire ; u injective $\iff \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

1.1.a.9 [L1] Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$ (forme géométrique du théorème du rang) [★].

1.1.a.10 [L2] Si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, une application linéaire sur E est déterminée par ses restrictions aux E_i, qui peuvent être choisies arbitrairement.

1.1.a.11 [L2] Associativité de la somme directe ; somme directe et bases adaptées (concaténation de bases des F_i).

1.1.a.12 [L3] Propriété universelle du quotient : si u s'annule sur F, il existe une unique $\bar{u} : E/F \to G$ linéaire avec $u = \bar{u} \circ \pi$; en particulier $E/\mathrm{Ker}\, u \simeq \mathrm{Im}\, u$ [★].

1.1.a.13 [L3] Tout supplémentaire de F est isomorphe à E/F ; si E est de dimension finie, $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

1.1.a.14 [L3] En dimension quelconque, tout sous-espace admet un supplémentaire et tout espace admet une base (lemme de Zorn) †.

Savoir-faire

1.1.a.15 [L1] Montrer qu'une partie est un sous-espace, de préférence en l'écrivant comme noyau d'une application linéaire ou comme sous-espace engendré.

1.1.a.16 [L1] Montrer qu'une application est un endomorphisme : linéarité *et* espace d'arrivée. [jury : écrit MG 2021]

1.1.a.17 [L2] Écrire correctement ce qu'il faut démontrer pour qu'une somme de p sous-espaces soit directe. [jury : écrit MG 2023]

1.1.a.18 [L3] Construire une application linéaire par passage au quotient.

Exemples et contre-exemples

1.1.a.19 [L1] Espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

1.1.a.20 [L2] Trois droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ ont des intersections deux à deux nulles, mais leur somme n'est pas directe.

1.1.a.21 [L3] En dimension infinie : la dérivation de $\mathbb{K}[X]$ est surjective non injective, la multiplication par X est injective non surjective.

Pièges relevés par le jury

1.1.a.22 [L2] Pour $p \geq 3$ sous-espaces, des intersections deux à deux nulles ne suffisent pas à rendre la somme directe. [jury : écrit MG 2023 : près de 80 % des candidats ayant abordé la question « ne peuvent écrire de façon correcte l'objectif »]

1.1.a.23 [L1] Ne pas confondre application linéaire et morphisme de groupes additifs. [jury : écrit MG 2021]

1.1.a.24 [L1] L'implication $\lambda x = 0 \Rightarrow (\lambda = 0$ ou $x = 0)$ découle des axiomes d'espace vectoriel (multiplier par λ^{-1}), pas de l'intégrité de $\mathbb{K}$. [jury : écrit MG 2023]

1.1.a.25 [L1] Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. [jury : écrit MG 2020]

1.1.b Sous-espaces stables, éléments propres, polynômes d'endomorphismes

Texte officiel : Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Polynômes d'endomorphismes. Lemme des noyaux.

Définitions

1.1.b.1 [L2] Sous-espace stable par u, endomorphisme induit u_F.

1.1.b.2 [L2] Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id})$; spectre $\operatorname{Sp}(u)$.

1.1.b.3 [L2] Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$; son noyau est l'idéal annulateur, son image la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$.

1.1.b.4 [L2] Polynôme annulateur ; polynôme minimal π_u (générateur unitaire de l'idéal annulateur, s'il est non nul).

Résultats

1.1.b.5 [L2] Si u et v commutent, $\operatorname{Ker} v$, $\operatorname{Im} v$ et les sous-espaces propres de v sont stables par u.

1.1.b.6 [L2] Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre ; la somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe ★.

1.1.b.7 [L2] Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$; toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur.

1.1.b.8 [L2] Lemme des noyaux : si $P = P_1 \cdots P_r$ avec les P_i deux à deux premiers entre eux, $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_i \operatorname{Ker} P_i(u)$ ★. [jury : leçons 122, 150]

1.1.b.9 [L3] Dans le lemme des noyaux, les projecteurs associés à la décomposition sont des polynômes en u (relation de Bézout) ★.

1.1.b.10 [L2] Le polynôme minimal de u_F divise celui de u.

1.1.b.11 [L2] Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est inclus dans son spectre dans $\mathbb{K}'$.

1.1.b.12 [L3] Si $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$, alors u est inversible et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Savoir-faire

1.1.b.13 [L2] Déterminer les éléments propres en résolvant $u(x) = \lambda x$, y compris en dimension infinie.

1.1.b.14 [L2] Décomposer l'espace avec le lemme des noyaux, par exemple $u^2 = u \Rightarrow E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$.

1.1.b.15 [L3] Exploiter la commutation : un endomorphisme qui commute avec u laisse stables les sous-espaces propres de u.

Exemples et contre-exemples

1.1.b.16 [L2] Dérivation : sur $\mathbb{K}[X]$ seule 0 est valeur propre ; sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tout réel λ l'est ($x \mapsto e^{\lambda x}$).

1.1.b.17 [L2] Projecteurs ($X^2 - X$) et symétries ($X^2 - 1$).

1.1.b.18 [L2] Une rotation d'angle $\pi/2$ de $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeur propre réelle : le spectre dépend du corps.

1.1.b.19 [L3] La multiplication par X sur $\mathbb{K}[X]$ n'a pas de polynôme annulateur non nul.

Pièges relevés par le jury

1.1.b.20 [L2] Un vecteur propre est non nul, et il n'est jamais unique : on ne dit pas « le » vecteur propre associé à λ. [jury : écrit MG 2023]

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1.2.a Dimension, rang, dualité

Texte officiel : Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbb{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

Définitions

1.2.a.1 [L1] Espace de dimension finie, dimension ; rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire.

1.2.a.2 [L1] Forme linéaire ; hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle).

1.2.a.3 [L1] Système d'équations linéaires, système homogène associé, rang du système.

1.2.a.4 [L3] Espace dual E^* ; base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$; base antéduale.

1.2.a.5 [L3] Transposée ${}^t u : F^* \to E^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ u$.

1.2.a.6 [L3] Bidual E^{**} et application canonique $x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$.

1.2.a.7 [L3] Orthogonalité : $A^\perp \subset E^*$ pour $A \subset E$, $B^\circ \subset E$ pour $B \subset E^*$.

Résultats

1.2.a.8 [L1] Théorème de la base incomplète et de la base extraite ★ ; toutes les bases ont même cardinal ★ ; tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

1.2.a.9 [L1] Un sous-espace d'un espace de dimension finie est de dimension finie, et $\dim F = \dim E \iff F = E$ ★. [jury : leçon 148 : « savoir justifier »]

1.2.a.10 [L1] Existence d'un supplémentaire ; formule de Grassmann.

1.2.a.11 [L1] Théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$ ★. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F$ finie : injective $\iff$ surjective $\iff$ bijective.

1.2.a.12 [L1] Une intersection de m hyperplans de E ($\dim E = n$) est de dimension au moins $n - m$; réciproquement, tout sous-espace de dimension $n - m$ en est une.

1.2.a.13 [L1] L'ensemble des solutions d'un système linéaire est vide ou un sous-espace affine de direction le noyau, de dimension $n - r$ (r le rang).

1.2.a.14 [L1] Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts ; base de $\mathbb{K}_n[X]$ formée de polynômes à degrés échelonnés. [jury : écrit MG 2021 : théorème « clairement au programme »]

1.2.a.15 [L3] $\dim E^* = \dim E$; les e_i^* sont les fonctions coordonnées ; toute base de E^* est la duale d'une unique base de E ★.

1.2.a.16 [L3] En dimension finie, l'application canonique $E \to E^{**}$ est un isomorphisme ★ ; c'est faux en dimension infinie.

1.2.a.17 [L3] $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, $(F^\perp)^\circ = F$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

1.2.a.18 [L3] $\operatorname{Ker} {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$, $\operatorname{Im} {}^t u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$, $\operatorname{rg} {}^t u = \operatorname{rg} u$; dans des bases duales, la matrice de ${}^t u$ est la transposée de celle de u ★.

1.2.a.19 [L3] $\varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff \bigcap_i \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} \varphi$ ★.

1.2.a.20 [L3] Le rang d'une matrice ne change pas par extension du corps de base. [jury : leçon 148]

Savoir-faire

1.2.a.21 [L1] Montrer qu'une famille est une base : libre et de cardinal égal à la dimension. [jury : écrit MG 2025 : parmi les « acquis les plus essentiels »]

1.2.a.22 [L1] Utiliser la dimension : égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions ; isomorphisme par injectivité et égalité des dimensions ; récurrence sur la dimension. [jury : leçon 148 ; écrit MG 2025]

1.2.a.23 [L1] Appliquer le théorème de la base échelonnée en citant ses hypothèses, plutôt que de refaire un long calcul. [jury : écrit MG 2021]

1.2.a.24 [L3] Calculer une base duale ou antéduale ; calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans par dualité. [jury : leçon 159]

1.2.a.25 [L3] Voir la différentielle d'une fonction à valeurs réelles comme une forme linéaire. [jury : leçon 159 : « incontournable »]

Exemples et contre-exemples

1.2.a.26 [L1] Interpolation de Lagrange : les polynômes de Lagrange en $x_0, \dots, x_n$ forment la base antéduale des formes $P \mapsto P(x_i)$ sur $\mathbb{K}_n[X]$.

1.2.a.27 [L3] $M \mapsto (A \mapsto \operatorname{Tr}(MA))$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual. [jury : leçon 159]

1.2.a.28 [L3] En dimension infinie, $E \to E^{**}$ n'est pas surjective : le dual de $\mathbb{K}[X]$ s'identifie à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Pièges relevés par le jury

1.2.a.29 [L1] Le théorème du rang ne dit pas que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$; il doit être énoncé, au moins sous la forme $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$. [jury : écrit MG 2020 : « $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$ » cité parmi les « perles »]

1.2.a.30 [L1] « Injective donc bijective en dimension finie » ne vaut que pour une application *linéaire* entre espaces de *même* dimension finie. [jury : écrits MG 2022, 2023]

1.2.a.31 [L2] L'existence d'une application linéaire $E_1 \to E_2$ ne donne pas $\dim E_1 \leq \dim E_2$: il faut qu'elle soit injective. [jury : écrit MG 2023]

1.2.a.32 [L1] Un espace vectoriel abstrait n'a pas de base canonique. [jury : écrit MG 2023]

1.2.a.33 [L1] Pour une base échelonnée, le nombre de vecteurs doit être égal à la dimension de l'espace. [jury : écrit MG 2021]

1.2.a.34 [L1] Pour une équivalence, une égalité d'ensembles ou une double inégalité, traiter aussi le sens « évident » : son omission est « une erreur de raisonnement à part entière ». [jury : écrit MG 2020 ; écrit MG 2022]

1.2.b Applications multilinéaires, déterminant, orientation

Texte officiel : Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(E)$. *Orientation d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Définitions

1.2.b.1 [L1] Forme n-linéaire alternée ; antisymétrie.

1.2.b.2 [L1] Déterminant d'une famille dans une base $\det_e$, d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

1.2.b.3 [L3] Groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(E) = \{u \in \mathrm{GL}(E) : \det u = 1\}$.

1.2.b.4 [L2] Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ; bases directes, indirectes.

1.2.b.5 [L1] Comatrice.

Résultats

1.2.b.6 [L1] Les formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n forment une droite, engendrée par $\det_e$ ★. [jury : leçon 149 : « savoir démontrer »]

1.2.b.7 [L1] $\det(u \circ v) = \det u \det v$; $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$; $\det {}^t A = \det A$; une famille de n vecteurs est une base si et seulement si son déterminant dans une base est non nul.

1.2.b.8 [L1] Développement selon une ligne ou une colonne ; $A\,{}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)\,A = \det(A) I_n$; formules de Cramer.

1.2.b.9 [L1] Déterminant de Vandermonde $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ ★. [jury : écrit MG 2021]

1.2.b.10 [L2] Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

1.2.b.11 [L3] $\mathrm{SL}(E)$ est distingué dans $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}(E)/\mathrm{SL}(E) \simeq \mathbb{K}^*$ (voir 2.d).

1.2.b.12 [L2] Deux bases ont même orientation si et seulement si le déterminant de la matrice de passage est > 0 ; il y a exactement deux orientations.

1.2.b.13 [L1] $|\det(x_1, \dots, x_n)|$ dans une base orthonormée est le volume du parallélépipède construit sur les x_i. [jury : leçon 149 : interprétation « essentielle »]

1.2.b.14 [L3] Déterminant de Gram : $G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$, nul si et seulement si la famille est liée ; $d(x, F)^2 = G(x, e_1, \dots, e_p)/G(e_1, \dots, e_p)$ †. [jury : leçons 149, 161]

1.2.b.15 [L3] Inégalité de Hadamard $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_i \|x_i\|$ †. [jury : écrit MG 2020, exercice 3 ; leçon 161]

1.2.b.16 [L2] Le déterminant est polynomial, donc continu ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; différentielle $H \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(A) H)$ †. [jury : leçon 149]

Savoir-faire

1.2.b.17 [L1] Calculer un déterminant par opérations élémentaires plutôt que par un développement brutal. [jury : écrit MG 2020]

1.2.b.18 [L1] Distinguer le déterminant d'une famille dans une base et le déterminant d'un endomorphisme. [jury : leçon 149]

1.2.b.19 [L1] Utiliser les formules de Cramer pour l'étude théorique des solutions d'un système (contrôle des dénominateurs). [jury : écrit MG 2020 : elles « semblent passées de mode »]

1.2.b.20 [L2] Utiliser la continuité du déterminant (densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ouverture de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). [jury : leçon 149]

Exemples et contre-exemples

1.2.b.21 [L1] Vandermonde, déterminants tridiagonaux (récurrence linéaire d'ordre 2), déterminants triangulaires par blocs.

1.2.b.22 [L3] Déterminants circulants ; le jury précise qu'une leçon ne peut se contenter de Vandermonde ou des circulants. [jury : leçon 149]

Pièges relevés par le jury

1.2.b.23 [L1] $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ en général, et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

1.2.b.24 [L1] Pour comparer deux déterminants, ne pas affirmer sans preuve que deux matrices sont semblables ou invoquer une « invariance du déterminant par changement de base » mal comprise. [jury : écrit MG 2020]

1.2.c Matrices, pivot de Gauss

Texte officiel : Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité. Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base. Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

Définitions

1.2.c.1 [L3] $\mathcal{M}_{n,p}(A)$ pour A anneau commutatif ; déterminant par la formule de Leibniz ; $\mathrm{GL}_n(A)$.

1.2.c.2 [L1] Opérations élémentaires (transvections, dilatations, permutations) et matrices élémentaires associées.

1.2.c.3 [L1] Rang d'une matrice ; matrice d'une application linéaire dans des bases ; matrice de passage.

1.2.c.4 [L1] Matrices équivalentes, matrices semblables.

1.2.c.5 [L1] Matrice échelonnée en lignes, échelonnée réduite ; pivots.

1.2.c.6 [L2] Matrices par blocs.

Résultats

1.2.c.7 [L3] Sur un anneau commutatif : $A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A) I_n$, donc $M \in \mathrm{GL}_n(A) \iff \det M \in A^\times$ ★. [jury : écrit MG 2021]

1.2.c.8 [L3] En particulier $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M : \det M = \pm 1\}$; une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ peut être inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ sans l'être dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1.2.c.9 [L1] Changement de base : $X = PX'$; $A' = Q^{-1}AP$ pour une application linéaire ; $A' = P^{-1}AP$ pour un endomorphisme ; ${}^tPAP$ pour une forme bilinéaire (chapitre 4). [jury : écrit MG 2020]

1.2.c.10 [L1] Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang ; toute matrice de rang r est équivalente à J_r ★.

1.2.c.11 [L1] $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^t A$; le rang est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite.

1.2.c.12 [L1] Les opérations élémentaires conservent le rang ; toute matrice se ramène par opérations sur les lignes à une matrice échelonnée réduite (pivot de Gauss) ★ ; unicité de la forme échelonnée réduite [L3] .

1.2.c.13 [L1] Toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires (voir 2.d).

1.2.c.14 [L3] Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont même forme échelonnée réduite si et seulement si elles ont même noyau : cela décrit les orbites de $(P, A) \mapsto PA$. [jury : leçon 162]

1.2.c.15 [L2] Calcul par blocs ; transvections par blocs.

Savoir-faire

1.2.c.16 [L1] Résoudre un système linéaire (discussion selon un paramètre incluse) et décrire ses solutions : solution particulière plus noyau. [jury : écrit MG 2020 : théorie des systèmes « mal connue ou mal maîtrisée »]

1.2.c.17 [L1] Calculer par pivot un rang, un déterminant, un inverse.

1.2.c.18 [L3] Obtenir des équations d'un sous-espace donné par une famille génératrice, une base d'une intersection d'hyperplans. [jury : leçons 159, 162]

1.2.c.19 [L1] Écrire la matrice d'un endomorphisme en précisant la base utilisée. [jury : écrits MG 2021, 2025]

1.2.c.20 [L1] Choisir la bonne formule de changement de base selon l'objet représenté.

Exemples et contre-exemples

1.2.c.21 [L1] Les matrices de rang 1 sont les $X\,{}^tY$ avec X, Y non nuls.

1.2.c.22 [L3] $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ bien que de déterminant non nul.

Pièges relevés par le jury

1.2.c.23 [L3] Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, de $\det M = 1$ on déduit l'inversibilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ parce que 1 est inversible dans $\mathbb{Z}$, non parce qu'il est non nul. [jury : écrit MG 2021 : « le candidat se voyait sanctionné si le jury avait le moindre doute »]

1.2.c.24 [L1] Un changement de base n'est pas un formulaire où l'on pioche : il dépend de l'objet que la matrice représente. [jury : écrit MG 2020]

1.2.c.25 [L1] Si l'on échelonne une matrice pour en calculer le rang, dire que les opérations élémentaires conservent le rang. [jury : écrit MG 2020]

1.2.c.26 [L1] L'inverse d'une matrice inversible à coefficients dans un sous-corps k est encore à coefficients dans k. [jury : écrit MG 2021 : résultat « au programme »]

1.2.d Réduction des endomorphismes

Texte officiel : Polynôme caractéristique. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Endomorphismes nilpotents. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

Définitions

1.2.d.1 [L2] Polynôme caractéristique $\chi_u = \det(X\,\mathrm{id} - u)$ (unitaire) ; multiplicité algébrique m_λ et multiplicité géométrique $\dim E_\lambda$.

1.2.d.2 [L2] Endomorphisme diagonalisable, trigonalisable ; nilpotent, indice de nilpotence.

1.2.d.3 [L2] Sous-espace caractéristique $N_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})^{m_\lambda}$.

1.2.d.4 [L3] Décomposition de Dunford $u = d + n$.

1.2.d.5 [L2] Exponentielle $\exp(A) = \sum_{k\geq 0} A^k/k!$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2.d.6 [L3] Matrice compagnon C_P ; endomorphisme cyclique. [jury : écrit MG 2025]

Résultats

1.2.d.7 [L2] Les valeurs propres sont les racines de χ_u ; $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$; χ_{u_F} divise χ_u ; deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

1.2.d.8 [L2] $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$ pour λ valeur propre.

1.2.d.9 [L2] π_u divise tout polynôme annulateur ; ses racines sont les valeurs propres ; $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$ ★. [jury : leçon 150 : à connaître « sans hésitation », rapport 2022]

1.2.d.10 [L2] Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$ (démonstration non exigible en MP) ★.

1.2.d.11 [L2] u diagonalisable $\iff \bigoplus E_\lambda = E \iff \chi_u$ scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour tout $\lambda \iff \pi_u$ scindé à racines simples $\iff u$ annule un polynôme scindé à racines simples ★.

1.2.d.12 [L2] u trigonalisable $\iff \chi_u$ scindé $\iff \pi_u$ scindé ★ ; sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.

1.2.d.13 [L2] L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable (resp. trigonalisable) sur un sous-espace stable est diagonalisable (resp. trigonalisable) ★. [jury : leçons 152, 156]

1.2.d.14 [L3] Une famille d'endomorphismes diagonalisables (resp. trigonalisables) qui commutent deux à deux est codiagonalisable (resp. cotrigonalisable) ★. [jury : leçon 152 ; écrit MG 2024]

1.2.d.15 [L2] u nilpotent $\iff \chi_u = X^n \iff u$ trigonalisable de seule valeur propre 0 ; l'indice est au plus n.

1.2.d.16 [L2] Si χ_u est scindé, $E = \bigoplus N_\lambda$, $\dim N_\lambda = m_\lambda$, et u est semblable à une matrice diagonale par blocs $\lambda I + N$ avec N nilpotente triangulaire.

1.2.d.17 [L3] Décomposition de Dunford : si χ_u est scindé, il existe un unique couple (d, n), d diagonalisable, n nilpotent, $dn = nd$, $u = d + n$; d et n sont des polynômes en u ★. [jury : leçon 150 : le « bien préciser »]

1.2.d.18 [L3] Réduction de Jordan des nilpotents ; classification des classes de similitude de nilpotents par les dimensions des noyaux itérés (partitions de n) †. [jury : leçon 156 ; écrit MG 2023]

1.2.d.19 [L3] Polynôme caractéristique et polynôme minimal d'une matrice compagnon : $\chi_{C_P} = \pi_{C_P} = P$; u est cyclique si et seulement si $\pi_u = \chi_u$ †. [jury : leçons 151, 156 ; écrit MG 2025]

1.2.d.20 [L2] Exponentielle : convergence normale de la série pour une norme sous-multiplicative ★ ; $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ si $AB = BA$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA)$; $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$; $\mathrm{Sp}(\exp A) = \exp(\mathrm{Sp}\,A)$. [jury : leçon 155 : « justifier précisément la convergence »]

1.2.d.21 [L3] $\det\exp(A) = e^{\mathrm{Tr}\,A}$; $\exp A$ est un polynôme en A ; décomposition de Dunford de $\exp A$: $\exp(d)$ et $\exp(d)(\exp(n) - I)$. [jury : leçon 155]

1.2.d.22 [L3] $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective ; exp réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$; l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ †. [jury : leçon 155]

Savoir-faire

1.2.d.23 [L2] Pour une matrice simple, justifier la diagonalisabilité et donner un polynôme annulateur, voire le polynôme minimal. [jury : leçon 150]

1.2.d.24 [L2] Trouver une valeur propre manquante par la trace (ou le déterminant). [jury : écrit MG 2020 : « peu de candidats ont le réflexe de la trace »]

1.2.d.25 [L2] Calculer A^k avec un polynôme annulateur (division euclidienne de X^k), sans réduire A. [jury : leçon 150]

1.2.d.26 [L2] Déterminer π_u parmi les diviseurs de χ_u (Cayley-Hamilton) après factorisation de χ_u en irréductibles. [jury : écrit MG 2025]

1.2.d.27 [L2] Montrer qu'un polynôme est à racines simples par $P \wedge P' = 1$, sans calculer ses racines. [jury : écrit MG 2025]

1.2.d.28 [L2] Calculer $\exp(tA)$ (diagonalisation, Dunford, polynôme annulateur) et résoudre $X' = AX$.

1.2.d.29 [L3] Décider si deux nilpotents sont semblables avec les noyaux itérés. [jury : leçon 156 : « fondamentale »]

1.2.d.30 [L3] Dénombrer des matrices diagonalisables ou nilpotentes sur $\mathbb{F}_q$. [jury : leçons 152, 156]

1.2.d.31 [L3] Raisonner par densité : les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (preuve de Cayley-Hamilton, continuité de χ).

Exemples et contre-exemples

1.2.d.32 [L2] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable ; une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\notin \pi\mathbb{Z}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

1.2.d.33 [L2] La matrice J dont tous les coefficients valent 1 : $J^2 = nJ$, spectre $\{0, n\}$.

1.2.d.34 [L3] $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle, alors que la matrice diagonale par blocs formée de deux copies de ce bloc l'est. [jury : leçon 155, rapport 2022]

Pièges relevés par le jury

1.2.d.35 [L2] Donner « les » valeurs propres demande de justifier que la liste est complète ; préciser de quelle multiplicité on parle. [jury : écrit MG 2020]

1.2.d.36 [L2] Il n'y a aucun lien entre inversibilité et diagonalisabilité, ni entre rang et nombre de valeurs propres ; ne pas confondre sous-espace propre et sous-espace caractéristique. [jury : écrit MG 2020 : « très nette perte de maîtrise sur ces notions »]

1.2.d.37 [L2] « A est trigonalisable, supposons-la triangulaire » est un changement de base : on ne garde pas les coefficients de la matrice de départ. [jury : écrit MG 2020]

1.2.d.38 [L2] $XI_n - A$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$, qui n'est pas un corps : le déterminant y est défini sur un anneau commutatif. [jury : leçon 149, rapport 2022]

1.2.d.39 [L2] Le polynôme minimal ne change pas par extension du corps : le rappeler si on le calcule sur $\mathbb{C}$ pour une matrice réelle ou rationnelle. [jury : écrit MG 2025]

1.2.d.40 [L2] La commutativité est nécessaire pour factoriser $A^k - B^k$, écrire $(AB)^k = A^k B^k$, appliquer la formule du binôme ou $\exp(A+B) = \exp A \exp B$. [jury : écrit MG 2022]

2 Groupes

Texte officiel : Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants sont appelées à être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

Bilan des rapports du jury 2020–2025. À l'écrit, la théorie des groupes intervient surtout comme *outil* : ordre d'un élément et sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (écrit MG 2023, exercice 1 : plus de la moitié des candidats n'ont pas répondu correctement à la question 1) ; ordres des éléments d'un groupe de Heisenberg sur un corps fini (écrit MG 2022) ; sous-groupes finis de $\mathbb{U}$ et sous-groupes abéliens de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ (écrit MG 2024) ; théorème de Lagrange et cyclicité de $\mathbb{F}_q^*$ (écrits MG 2020, 2021, 2024, 2025). Le jury insiste chaque année sur la précision des vérifications élémentaires (sous-groupe, morphisme). Il précise aussi, tous les ans depuis 2020, que *le produit semi-direct et les théorèmes de Sylow débordent du programme.*

2.a Généralités, sous-groupes, quotients, actions

Texte officiel : Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension deux et trois.

Définitions

2.a.1 [L1] Groupe, groupe abélien ; morphisme, isomorphisme, automorphisme ; noyau $\operatorname{Ker} f$, image $\operatorname{Im} f$.

2.a.2 [L1] Produit direct $G \times H$ (loi composante par composante).

2.a.3 [L1] Sous-groupe ; caractérisation : $H \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in H,\ xy^{-1} \in H$.

2.a.4 [L2] Sous-groupe engendré $\langle A \rangle$: intersection des sous-groupes contenant A, ou ensemble des produits finis d'éléments de $A \cup A^{-1}$; partie génératrice. [jury : leçon 108]

2.a.5 [L2] Ordre d'un élément : $\mathrm{ord}(x) = |\langle x \rangle|$.

2.a.6 [L3] Classes à gauche gH, à droite Hg ; indice $[G : H]$.

2.a.7 [L3] Sous-groupe distingué : $gHg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$; groupe quotient G/H et surjection canonique.

2.a.8 [L3] Centre $Z(G)$, centralisateur $C_G(x)$, normalisateur $N_G(H)$ †.

2.a.9 [L3] Automorphismes intérieurs $\mathrm{Int}(G)$; conjugaison ; classes de conjugaison. [jury : leçon 103]

2.a.10 [L3] Action de G sur X (de façon équivalente, morphisme $G \to \mathfrak{S}(X)$) ; orbite $\mathrm{Orb}(x)$, stabilisateur $\mathrm{Stab}(x)$, ensemble des orbites X/G.

2.a.11 [L3] Action transitive, fidèle, libre ; points fixes $\mathrm{Fix}(g)$, X^G.

Résultats

2.a.12 [L1] L'image directe et l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme sont des sous-groupes ; f injectif $\iff \mathrm{Ker}\, f = \{e\}$.

2.a.13 [L2] Sous-groupes de $\mathbb{Z}$: ce sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ★.

2.a.14 [L2] Si $\mathrm{ord}(x) = d$ est fini : $x^n = e \iff d \mid n$ ★. [jury : écrits MG 2022, 2023]

2.a.15 [L3] Théorème de Lagrange : si G est fini, $|H|$ divise $|G|$ ★. [jury : « incontournable », leçon 104 ; écrits MG 2020, 2021, 2025]

2.a.16 [L2] Conséquence : $\mathrm{ord}(x)$ divise $|G|$ et $x^{|G|} = e$ (en MP, démonstration exigée seulement pour G commutatif).

2.a.17 [L3] $\mathrm{Ker}\, f$ est distingué ; un sous-groupe d'indice 2 est distingué ★.

2.a.18 [L3] Propriété universelle du quotient ; premier théorème d'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$ ★. [jury : « incontournable », leçon 103 ; écrit MG 2025]

2.a.19 [L3] Sous-groupes de $G/H \leftrightarrow$ sous-groupes de G contenant H †. [jury : leçon 103 ; écrit MG 2023]

2.a.20 [L3] Si H ou K est distingué, HK est un sous-groupe ; $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$ †.

2.a.21 [L3] Produit direct interne : $H, K \lhd G$, $H \cap K = \{e\}$, $HK = G \Rightarrow G \simeq H \times K$ †. [jury : leçon 103]

2.a.22 [L3] Théorème de Cayley : tout groupe G se plonge dans $\mathfrak{S}(G)$ †. [jury : leçon 105]

2.a.23 [L3] Relation orbite-stabilisateur : $|\mathrm{Orb}(x)| = [G : \mathrm{Stab}(x)]$; $\mathrm{Stab}(g \cdot x) = g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$ ★.

2.a.24 [L3] Formule des classes : $|X| = \sum_i [G : \mathrm{Stab}(x_i)]$ (une orbite par x_i) ; pour la conjugaison, $|G| = |Z(G)| + \sum_i [G : C_G(x_i)]$ ★.

2.a.25 [L3] Formule de Burnside : $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$ †. [jury : dénombrements, leçon 101]

2.a.26 [L3] Si G est un p-groupe agissant sur X fini : $|X| \equiv |X^G| \pmod p$ ★ ; le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial ★ ; un groupe d'ordre p^2 est abélien ★.

2.a.27 [L3] Théorème de Cauchy : si p premier divise $|G|$, il existe un élément d'ordre p † ★.

2.a.28 [L3] Groupes d'ordre premier ; groupes d'ordre au plus 8 à isomorphisme près : ordre 4, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et V_4 ; ordre 6, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$; ordre 8, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, D_4 et Q_8. [jury : leçon 104]

2.a.29 [L3] Théorèmes de Sylow (existence, conjugaison, $n_p \equiv 1 \pmod p$, $n_p \mid m$ si $|G| = p^a m$, $p \nmid m$) HP. [jury : « débordent du programme », leçon 103]

2.a.30 [L3] Produit semi-direct, par exemple $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ HP. [jury : « déborde du programme », leçon 103]

2.a.31 [L3] Groupe d'isométries d'un n-gone régulier : le groupe diédral D_n, d'ordre $2n$.

2.a.32 [M1] Polyèdres réguliers : tétraèdre, $\mathrm{Isom} \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}^+ \simeq \mathfrak{A}_4$; cube et octaèdre, $\mathrm{Isom}^+ \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom} \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; icosaèdre et dodécaèdre, $\mathrm{Isom}^+ \simeq \mathfrak{A}_5$ et $\mathrm{Isom} \simeq \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. [jury : leçons 101, 104]

Savoir-faire

2.a.33 [L1] Montrer qu'une partie est un sous-groupe (caractérisation, ou en l'écrivant comme noyau ou image d'un morphisme).

2.a.34 [L2] Calculer l'ordre d'un élément (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, un produit direct).

2.a.35 [L2] Déterminer l'ensemble des ordres des éléments d'un groupe. [jury : écrit MG 2022]

2.a.36 [L3] Montrer qu'un sous-groupe est distingué : noyau d'un morphisme, indice 2, stabilité par conjugaison.

2.a.37 [L3] Obtenir un isomorphisme par passage au quotient, par exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$ ou $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}_+^*$.

2.a.38 [L3] Dénombrer avec orbite-stabilisateur : $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|$, cardinal d'une orbite, nombre de coloriages avec Burnside.

2.a.39 [L3] Faire agir un groupe sur un ensemble bien choisi pour obtenir un morphisme vers $\mathfrak{S}_n$, par exemple le groupe du cube sur ses 4 grandes diagonales.

2.a.40 [L3] Classifier des objets par les orbites d'une action : représentant simple de chaque orbite, ou invariants qui caractérisent les orbites. [jury : leçon 101 ; écrit MG 2023]

2.a.41 [M1] Déterminer le groupe d'isométries d'un polytope régulier : action sur les sommets ou les diagonales, ordre par orbite-stabilisateur, identification à un groupe connu.

Exemples et contre-exemples

2.a.42 [L2] Groupes de référence vus en prépa : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{U}_n$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

2.a.43 [L3] Autres groupes de référence : $\mathfrak{A}_n$, D_n, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, groupe des quaternions Q_8 †.

2.a.44 [L3] La réciproque de Lagrange est fausse : $\mathfrak{A}_4$ (ordre 12) n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

2.a.45 [L3] « Distingué » n'est pas transitif : $\{\mathrm{id}, (12)(34)\} \lhd V_4 \lhd \mathfrak{A}_4$, mais $\{\mathrm{id}, (12)(34)\}$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{A}_4$.

Pièges relevés par le jury

2.a.46 [L1] Pour un sous-groupe, vérifier *toutes* les conditions, y compris la stabilité par passage à l'inverse ; pour un morphisme, vérifier précisément $f(xy) = f(x)f(y)$. [jury : écrit MG 2025 : vérifications « souvent imprécises voire fausses »]

2.a.47 [L2] Quand on invoque le théorème de Lagrange, dire dans quel groupe on travaille. [jury : écrit MG 2020]

2.a.48 [L2] « Déterminer les ordres des éléments » demande deux choses : chaque ordre annoncé est atteint par au moins un élément, et aucun autre ordre n'est possible. [jury : écrit MG 2022 : la première partie souvent oubliée]

2.a.49 [L1] Respecter la notation de l'énoncé : la notation additive est réservée aux groupes abéliens, et dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ on parle de $k\bar{x}$, pas de x^k. [jury : écrits MG 2022, 2023]

2.a.50 [L2] Un argument de Lagrange ou le petit théorème de Fermat remplace souvent des pages de calcul (attention aux hypothèses de Fermat). [jury : écrit MG 2021]

2.b Groupes cycliques, abéliens finis, racines de l'unité

Texte officiel : Groupes cycliques. Groupes abéliens finis. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

Définitions

2.b.1 [L2] Groupe monogène, groupe cyclique ; générateur.

2.b.2 [L2] Indicatrice d'Euler $\varphi(n)$.

2.b.3 [L3] Exposant d'un groupe fini (ppcm des ordres des éléments) †.

2.b.4 [L1] $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

2.b.5 [L2] Racine primitive n-ième de l'unité (générateur de $\mathbb{U}_n$).

Résultats

2.b.6 [L2] Un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ★.

2.b.7 [L3] Dans un groupe cyclique d'ordre n, il existe pour chaque $d \mid n$ un unique sous-groupe d'ordre d, et il est cyclique ★. [jury : écrit MG 2023, question 1]

2.b.8 [L2] Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: les classes $\bar{k}$ avec $k \wedge n = 1$; il y en a $\varphi(n)$.

2.b.9 [L3] $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ ★.

2.b.10 [L2] Un groupe d'ordre premier est cyclique. [jury : leçon 104]

2.b.11 [L2] Ordre dans un produit : $\mathrm{ord}(x, y) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{ord}\, x, \mathrm{ord}\, y)$; $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique $\iff m \wedge n = 1$.

2.b.12 [L3] Dans un groupe abélien : si $\operatorname{ord} x \wedge \operatorname{ord} y = 1$, alors $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord} x \cdot \operatorname{ord} y$; il existe un élément d'ordre égal à l'exposant ★.

2.b.13 [L3] Tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ ($\mathbb{K}$ corps commutatif) est cyclique ; en particulier $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique ★. [jury : écrits MG 2024, 2025 ; leçon 104]

2.b.14 [L2] $\mathbb{U}_n$ est cyclique d'ordre n, engendré par $e^{2i\pi/n}$; les racines primitives sont les $e^{2ik\pi/n}$ avec $k \wedge n = 1$.

2.b.15 [L2] Les sous-groupes finis de $\mathbb{U}$ sont les $\mathbb{U}_n$ ★. [jury : écrit MG 2024 ; leçon 102]

2.b.16 [L2] $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (l'isomorphisme $\mathbb{U} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est au programme de MP). [jury : écrit MG 2024]

2.b.17 [L3] Théorème de structure : tout groupe abélien fini est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ avec $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$, et ces d_i (facteurs invariants) sont uniques. À savoir énoncer exactement, en comprenant le sens de l'unicité, et appliquer ; la démonstration est « techniquement exigeante ». [jury : « doit figurer », leçon 104]

2.b.18 [M1] $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est cyclique si et seulement si $n \in \{1, 2, 4\}$ ou $n = p^k$ ou $2p^k$ avec p premier impair †. [jury : leçon 108]

Savoir-faire

2.b.19 [L2] Décider si un groupe est cyclique et en trouver un générateur.

2.b.20 [L3] Écrire un groupe abélien fini sous forme de facteurs invariants, par exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

2.b.21 [L3] Lister les groupes abéliens d'un ordre donné, à isomorphisme près (par exemple d'ordre 72).

2.b.22 [L2] Montrer que deux groupes ne sont pas isomorphes en comparant les ordres de leurs éléments.

Exemples et contre-exemples

2.b.23 [L3] $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ n'est pas cyclique ; $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ l'est.

2.b.24 [L2] $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: le plus petit groupe non cyclique.

Pièges relevés par le jury

2.b.25 [L2] Un groupe cyclique d'ordre n possède $\varphi(n)$ éléments d'ordre n, pas un seul. [jury : écrit MG 2023 : erreur « fréquente »]

2.b.26 [L2] Si $d \mid n$, $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ n'est *pas* inclus dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: la flèche naturelle est la surjection $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$; le sous-groupe d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $(n/d)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. [jury : écrit MG 2023]

2.c Groupe symétrique

Texte officiel : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

Définitions

2.c.1 [L1] $\mathfrak{S}_n$, support d'une permutation, cycle, transposition.

2.c.2 [L1] Signature ε ; inversions.

2.c.3 [L3] Groupe alterné $\mathfrak{A}_n = \operatorname{Ker} \varepsilon$.

2.c.4 [L3] Type cyclique d'une permutation.

Résultats

2.c.5 [L1] $|\mathfrak{S}_n| = n!$; deux cycles à supports disjoints commutent.

2.c.6 [L1] Décomposition en produit de cycles à supports disjoints, unique à l'ordre près (démonstration non exigible en MPSI) ★. [jury : leçon 105 : preuve attendue]

2.c.7 [L1] $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions ★.

2.c.8 [L3] Autres familles génératrices : les $(1\,i)$; $(1\,2)$ et $(1\,2\,\ldots\,n)$. [jury : leçons 105, 108]

2.c.9 [L1] La signature est l'unique morphisme $\mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ envoyant les transpositions sur -1 (démonstration non exigible en MPSI) ★ ; $\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^{\text{nb d'inversions}} = (-1)^{n-m}$,

où m est le nombre d'orbites de σ ; un k-cycle a pour signature $(-1)^{k-1}$. [jury : « résultat non trivial », leçon 105]

2.c.10 [L3] $\mathfrak{A}_n$ est distingué d'indice 2, de cardinal $n!/2$, et engendré par les 3-cycles $(n \geq 3)$ ★.

2.c.11 [L3] Deux permutations sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si elles ont même type cyclique ★. [jury : leçon 105]

2.c.12 [L2] L'ordre d'une permutation est le ppcm des longueurs de ses cycles.

2.c.13 [L3] $Z(\mathfrak{S}_n)$ est trivial pour $n \geq 3$ †.

2.c.14 [L3] $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$ †. [jury : simplicité de $\mathfrak{A}_5$, leçon 108]

2.c.15 [L3] Matrices de permutation : $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif $\mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$. [jury : leçon 106]

2.c.16 [L1] Déterminant : formule de Leibniz $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$; l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est une droite ★.

Savoir-faire

2.c.17 [L1] Décomposer une permutation en cycles et en transpositions ; calculer sa signature.

2.c.18 [L3] Dénombrer les permutations d'un type cyclique donné ; décrire les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$.

2.c.19 [L3] Montrer qu'une famille engendre $\mathfrak{S}_n$ ou $\mathfrak{A}_n$.

2.c.20 [L3] Plonger un groupe fini dans un $\mathfrak{S}_n$ (Cayley) et calculer la signature des permutations obtenues. [jury : leçon 105]

2.c.21 [L1] Démontrer les propriétés du déterminant (multiplicativité, transposée) à partir de la formule de Leibniz.

Exemples et contre-exemples

2.c.22 [L3] $\mathfrak{S}_3 \simeq D_3$: le plus petit groupe non abélien.

2.c.23 [L3] $\mathfrak{A}_4$ a un sous-groupe distingué V_4, donc n'est pas simple.

2.d Groupes classiques

Texte officiel : Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

Définitions

2.d.1 [L1] $\mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (groupe linéaire).

2.d.2 [L3] $\mathrm{SL}(E) = \{u : \det u = 1\}$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

2.d.3 [L2] $\mathrm{O}(E)$ (E euclidien) : u conserve le produit scalaire, ou de façon équivalente $u^* u = \mathrm{id}$; $\mathrm{SO}(E)$; $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M : {}^t M M = I_n\}$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

2.d.4 [L3] $\mathrm{U}(E)$ (E hermitien), $\mathrm{SU}(E)$; $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{M : M^* M = I_n\}$ (le produit scalaire hermitien est hors programme de MP).

2.d.5 [L1] Matrices de transvection et de dilatation (opérations élémentaires).

Résultats

2.d.6 [L3] $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker} \det \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$.

2.d.7 [L3] $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$ ★ ; $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|/(q-1)$. [jury : leçon 106]

2.d.8 [L1] Toute matrice inversible est produit de matrices de transvection et de dilatation (pivot de Gauss) ★. [jury : leçon 106]

2.d.9 [L3] Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ ★.

2.d.10 [L2] Centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices inversibles sont les homothéties, $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^* I_n$ ★.

2.d.11 [L2] Une matrice orthogonale est de déterminant ± 1 ; $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée.

2.d.12 [L2] $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact ; $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ aussi †.

2.d.13 [L2] $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas (deux composantes, selon le signe du déterminant) ; $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs †. [jury : leçons 106, 108]

Savoir-faire

2.d.14 [L3] Calculer le cardinal de groupes linéaires finis par action sur les bases.

2.d.15 [L2] Vérifier qu'une matrice est orthogonale (ou unitaire).

2.d.16 [L3] Reconnaître des sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$ comme stabilisateurs d'une action naturelle : d'une forme quadratique, d'un drapeau, d'une décomposition en somme directe. [jury : leçon 106]

3 Anneaux, corps et polynômes

Bilan des rapports du jury 2020–2025. Ce chapitre fournit l'essentiel des sujets de mathématiques générales récents : factorisation des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ par réduction modulo p, algorithme d'Euclide, corps finis (écrit MG 2020) ; polynômes à valeurs entières, inversibles de $\mathbb{Z}[X]$, entiers de Gauss (écrit MG 2021) ; sous-corps d'un corps fini (écrit MG 2022) ; congruences et équation diophantienne modulo 3 (écrit MG 2023, exercice 2) ; irréductibilité des polynômes cyclotomiques (écrit MG 2024) ; extensions monogènes, polynôme minimal, corps $\mathbb{F}_4$, corps des fractions (écrit MG 2025). Le jury 2025 insiste : « une connaissance précise des notions de base d'algèbre générale garantissait déjà une performance honorable », alors que « les définitions des objets de base de l'algèbre ne sont pas connues ou manipulées avec suffisamment de rigueur » (axiomes de sous-corps, de morphisme, bonne définition d'une application).

3.a Anneaux, idéaux, quotients

Texte officiel : Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Théorème chinois. Notion d'algèbre associative sur un anneau commutatif.

Définitions

3.a.1 [L1] Anneau (unitaire), anneau commutatif, anneau intègre ; morphisme d'anneaux ($f(1) = 1$) ; sous-anneau ; groupe des inversibles $A^\times$.

3.a.2 [L2] Produit fini d'anneaux.

3.a.3 [L2] Idéal d'un anneau commutatif ; idéal engendré par un élément aA ; noyau d'un morphisme d'anneaux.

3.a.4 [L3] Anneau quotient A/I et surjection canonique ; idéal premier (A/I intègre) ; idéal maximal (A/I corps).

3.a.5 [L2] Algèbre (unitaire) sur un corps, sous-algèbre, morphisme d'algèbres ; algèbre associative sur un anneau commutatif [L3] .

3.a.6 [L1] Diviseurs de zéro, éléments nilpotents.

Résultats

3.a.7 [L2] Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$★.

3.a.8 [L2] Le noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs est un idéal ; l'image est un sous-anneau.

3.a.9 [L3] Propriété universelle du quotient ; $A/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$ ★ ; idéaux de $A/I \leftrightarrow$ idéaux de A contenant I.

3.a.10 [L3] Tout idéal maximal est premier ; dans $\mathbb{Z}$, les idéaux premiers non nuls sont les $p\mathbb{Z}$, p premier, et ils sont maximaux★.

3.a.11 [L3] Existence d'un idéal maximal contenant un idéal propre (lemme de Zorn) †.

3.a.12 [L2] Théorème chinois : si $m \wedge n = 1$, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; extension à plus de deux facteurs★. [jury : leçon 120 : « incontournable », avec sa réciproque]

3.a.13 [L3] Forme générale : si $I + J = A$, alors $A/(I \cap J) \simeq A/I \times A/J$ ★.

3.a.14 [L3] $(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$; d'où $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si $m \wedge n = 1$.

Savoir-faire

3.a.15 [L1] Vérifier qu'une partie est un sous-anneau : elle contient 1, est stable par différence et par produit.

3.a.16 [L3] Identifier un quotient grâce à un morphisme surjectif bien choisi : $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$, $A[X]/(X-a) \simeq A$.

3.a.17 [L2] Résoudre un système de congruences en construisant explicitement l'isomorphisme chinois inverse. [jury : leçons 120, 142]

3.a.18 [L3] Montrer qu'un idéal est premier ou maximal en identifiant le quotient.

Exemples et contre-exemples

3.a.19 [L1] $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: anneau non commutatif, avec diviseurs de zéro et nilpotents.

3.a.20 [L3] Dans $\mathbb{Z}[X]$, l'idéal (X) est premier non maximal ; l'idéal $(2, X)$ n'est pas principal. [jury : leçon 122]

3.a.21 [L3] Anneaux de référence : $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[e^{2i\pi/3}]$, décimaux $\mathbb{Z}[1/10]$. [jury : leçon 122]

Pièges relevés par le jury

3.a.22 [L1] $A^\times$ et $A \setminus \{0\}$ ne coïncident que si A est un corps. [jury : écrit MG 2021 : confusion relevée « comme chaque année »]

3.a.23 [L2] La formule du binôme suppose que les deux éléments commutent. [jury : écrit MG 2022]

3.a.24 [L3] Vérifier tous les axiomes d'un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, y compris la compatibilité avec la multiplication externe ; $\mathcal{L}_\mathbb{K}(L)$ est un anneau pour $+$ et $\circ$. [jury : écrit MG 2025]

3.b Polynômes

Texte officiel : Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Formule de Taylor (en caractéristique nulle). Décomposition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

Définitions

3.b.1 [L1] $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en MPSI) : degré, coefficient dominant, polynôme unitaire ; $A[X]$ pour A anneau commutatif [L3] .

3.b.2 [L3] $A[X_1, \dots, X_n]$: monômes, degré total, polynômes homogènes, composantes homogènes.

3.b.3 [L1] Racine, multiplicité, polynôme scindé ; fonction polynomiale associée.

3.b.4 [L1] Polynôme dérivé (formel).

3.b.5 [L3] Polynômes symétriques ; polynômes symétriques élémentaires σ_k ; sommes de Newton $p_k = \sum_i X_i^k$.

Résultats

3.b.6 [L1] Si A est intègre : $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, $A[X]$ est intègre et $A[X]^\times = A^\times$. [jury : écrit MG 2021]

3.b.7 [L1] Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$; dans $A[X]$, division par un polynôme de coefficient dominant inversible [L3] .

3.b.8 [L1] a racine de $P \iff (X - a) \mid P$; sur un anneau intègre, un polynôme non nul a au plus $\deg P$ racines ★.

3.b.9 [L1] Formule de Taylor polynomiale en caractéristique nulle ; a est racine de multiplicité m si et seulement si $P(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \neq P^{(m)}(a)$ ★.

3.b.10 [L1] Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

3.b.11 [L3] Identités de Newton : $p_k - \sigma_1 p_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}p_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0$ pour $k \leq n$ ★.

3.b.12 [L3] Théorème fondamental : tout polynôme symétrique de $A[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit de façon unique comme polynôme à coefficients dans A en $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ★. [jury : leçons 105, 144]

3.b.13 [L3] Sur un corps infini, un polynôme à n indéterminées est nul si et seulement si sa fonction polynomiale est nulle ★.

3.b.14 [L1] Interpolation de Lagrange : existence et unicité de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ prenant des valeurs données en $n + 1$ points distincts ★.

3.b.15 [L1] Formule de Leibniz ; factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

3.b.16 [L3] Sur un corps, P a une racine multiple dans une extension si et seulement si $P \wedge P' \neq 1$. [jury : écrit MG 2025]

3.b.17 [L3] Le résultant ne figure plus au programme de mathématiques générales ; il reste au programme de l'option C †. [jury : option C]

Savoir-faire

3.b.18 [L1] Calculer des expressions symétriques des racines ($\sum x_i^2$, $\sum 1/x_i$) à l'aide des coefficients. [jury : leçon 144]

3.b.19 [L3] Exprimer un polynôme symétrique donné en fonction des σ_k (récurrence sur le monôme dominant).

3.b.20 [L1] Interpoler ; en particulier, toute application $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ est polynomiale. [jury : écrit MG 2021, exercice 4]

3.b.21 [L3] Localiser les racines : borne de Cauchy $|z| \leq 1 + \max_k |a_k/a_n|$, disques de Gershgorin appliqués à la matrice compagnon. [jury : écrit MG 2020, exercice 2 ; leçon 144]

Exemples et contre-exemples

3.b.22 [L3] Sur $\mathbb{F}_p$, $X^p - X$ est non nul mais sa fonction polynomiale est nulle ; $(X^p)' = 0$.

3.b.23 [L3] Sur un anneau non intègre, un polynôme peut avoir trop de racines : $X^2 - 1$ a quatre racines dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Pièges relevés par le jury

3.b.24 [L1] Ne pas confondre polynôme et fonction polynomiale. [jury : écrit MG 2021]

3.b.25 [L1] Définir précisément la multiplicité d'une racine (définition algébrique, et analytique quand c'est possible). [jury : leçon 144 : « indispensable »]

3.c Corps, extensions, corps finis

Texte officiel : Corps, sous-corps. Caractéristique, morphisme de Frobenius. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.

Définitions

3.c.1 [L1] Corps ; sous-corps [L2] . [jury : écrit MG 2022 : la définition d'un sous-corps est « un attendu du programme »]

3.c.2 [L3] Caractéristique ; morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$.

3.c.3 [L3] Extension $L/\mathbb{K}$, degré $[L : \mathbb{K}]$; $\mathbb{K}[x]$ et $\mathbb{K}(x)$.

3.c.4 [L3] Corps des fractions $\mathrm{Frac}(A)$ d'un anneau intègre.

3.c.5 [L3] Élément algébrique, polynôme minimal μ_x ; élément transcendant ; extension algébrique ; corps algébriquement clos.

3.c.6 [L3] Corps de rupture, corps de décomposition d'un polynôme.

Résultats

3.c.7 [L3] La caractéristique est 0 ou un nombre premier p ; en caractéristique p, $(a+b)^p = a^p + b^p$ et le Frobenius est un morphisme injectif, bijectif si le corps est fini ★.

3.c.8 [L3] Théorème de la base télescopique : $[M : \mathbb{K}] = [M : L][L : \mathbb{K}]$ ★. [jury : leçons 123, 125, 141 : « incontournable »]

3.c.9 [L3] x est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathbb{K}[x]$ est de dimension finie, et alors $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K}(x) \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_x)$, de degré $\deg \mu_x$ ★. [jury : écrit MG 2025 : environ 15 % des copies ont plus de la moitié des points]

3.c.10 [L3] μ_x est irréductible et divise tout polynôme annulateur de x ; un polynôme unitaire annulateur de x est μ_x si et seulement s'il est irréductible ; μ_x est aussi le polynôme minimal de chacune de ses racines. [jury : écrit MG 2025]

3.c.11 [L3] Toute extension finie est algébrique ; les éléments algébriques forment un sous-corps ★ ; les nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ forment un corps algébriquement clos †. [jury : leçon 141, rapport 2022 : « il est bon de savoir le montrer »]

3.c.12 [L3] Existence et unicité à isomorphisme près du corps de rupture d'un irréductible et du corps de décomposition ★.

3.c.13 [L3] Propriété universelle du corps des fractions ; $\mathbb{Q} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z})$, $\mathbb{K}(X) = \mathrm{Frac}(\mathbb{K}[X])$.

3.c.14 [L1] $\mathbb{R}$: propriété de la borne supérieure ; construction de $\mathbb{R}$ [L3] †.

3.c.15 [L1] Théorème de d'Alembert-Gauss (démonstration hors programme en MPSI) ★ : en connaître une démonstration.

3.c.16 [L3] Un corps fini a p^n éléments ; existence et unicité de $\mathbb{F}_{p^n}$ (corps de décomposition de $X^{p^n} - X$) ★ ; les sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ sont les $\mathbb{F}_{p^d}$, $d \mid n$, chacun unique ★. [jury : leçon 123 ; écrit MG 2022]

3.c.17 [L3] $X^{p^n} - X$ est le produit des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré divisant n ★. [jury : écrit MG 2020, exercice 4 : « développement fréquemment proposé »]

3.c.18 [L3] Il existe des irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$, et $\mathbb{F}_{p^n} \simeq \mathbb{F}_p[X]/(P)$ pour P irréductible de degré n.

3.c.19 [L3] Carrés de $\mathbb{F}_q$, q impair : il y en a $(q+1)/2$ (zéro compris) ; -1 est un carré si et seulement si $q \equiv 1 \pmod 4$. [jury : leçon 123]

3.c.20 [L3] e et π sont transcendants (énoncés à connaître, démonstrations non exigibles) †. [jury : leçon 127]

3.c.21 [L3] Théorème de Wantzel et nombres constructibles †. [jury : leçons 125, 191]

Savoir-faire

3.c.22 [L2] Montrer qu'une partie est un sous-corps : sous-groupe additif (stabilité par opposé comprise), contient 1, stable par produit et par inverse des éléments non nuls. [jury : écrit MG 2025 : ces vérifications sont « très fréquemment » incomplètes]

3.c.23 [L3] Montrer que $\mathbb{K}[x]$ est un corps quand x est algébrique (Bézout, ou injectivité de la multiplication en dimension finie). [jury : écrit MG 2025 : « cette question attendait un meilleur succès »]

3.c.24 [L3] Calculer un degré d'extension avec la base télescopique : $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.

3.c.25 [L3] Calculer le polynôme minimal d'un nombre algébrique simple ($\sqrt{2} + \sqrt{3}$, racines de l'unité). [jury : leçon 125]

3.c.26 [L3] Calculer dans un corps fini non premier : construction de $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$, $\mathbb{F}_9$, inversion par Bézout. [jury : leçon 123 ; option C]

3.c.27 [L3] Vérifier qu'une application définie sur $\mathrm{Frac}(A)$ ne dépend pas de l'écriture a/b choisie. [jury : écrit MG 2025]

Exemples et contre-exemples

3.c.28 [L3] $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[j]$ avec $j^2 + j + 1 = 0$; $j^3 = 1$ découle de $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$. [jury : écrit MG 2025]

3.c.29 [L3] $\mathbb{F}_{p^n}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p^n$ comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, pas comme anneau. [jury : option C]

3.c.30 [L3] $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est un corps de rupture de $X^3 - 2$ mais pas son corps de décomposition, qui est de degré 6.

3.c.31 [L3] $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}$ est une extension transcendante.

Pièges relevés par le jury

3.c.32 [L3] « L est le seul sous-corps de cardinal q » demande aussi de montrer que L est un sous-corps de cardinal q. [jury : écrit MG 2022 : partie « généralement omise »]

3.c.33 [L3] Invoquer « la théorie des corps finis » ne suffit pas : en rappeler les rudiments ; $\mathbb{F}_p[t]/(f)$ n'est pas « égal » à l'ensemble des polynômes de degré $< \deg f$, il est en bijection avec lui. [jury : écrit MG 2020]

3.c.34 [L3] « f irréductible $\Rightarrow (f)$ maximal » utilise que $\mathbb{F}_p[t]$ est principal. [jury : écrit MG 2020]

3.c.35 [L3] Connaître d'autres corps finis que les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [jury : option C : sinon, ce n'est « pas acceptable »]

3.d Divisibilité, anneaux factoriels, principaux, euclidiens

Texte officiel : Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun. Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ et de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbb{K}$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbb{Q}[X]$, critère d'Eisenstein.

Définitions

3.d.1 [L2] Divisibilité dans un anneau intègre ; éléments associés ($a \mid b \iff bA \subset aA$).

3.d.2 [L3] Élément irréductible, élément premier ; PGCD, PPCM ; éléments premiers entre eux.

3.d.3 [L3] Anneau factoriel, anneau principal, anneau euclidien.

3.d.4 [L3] Contenu d'un polynôme sur un anneau factoriel, polynôme primitif.

3.d.5 [L3] Polynômes cyclotomiques $\Phi_n = \prod(X - \zeta)$, ζ racine primitive n-ième de l'unité.

Résultats

3.d.6 [L3] Euclidien $\Rightarrow$ principal $\Rightarrow$ factoriel $\bigstar$; les réciproques sont fausses.

3.d.7 [L3] Dans un anneau principal : irréductible $\iff$ premier $\iff$ engendre un idéal maximal (élément non nul) ; relation de Bézout $aA + bA = dA$; lemme de Gauss $\bigstar$. [jury : leçon 122 : démonstrations à « maîtriser »]

3.d.8 [L1] Arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$: PGCD, Bézout, Gauss, décomposition en irréductibles.

3.d.9 [L3] Lemme de Gauss sur le contenu ; si A est factoriel, $A[X]$ l'est, et ses irréductibles sont les irréductibles de A et les primitifs irréductibles dans $\mathrm{Frac}(A)[X]$ $\bigstar$.

3.d.10 [L1] Algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu. [jury : leçon 142 ; option C]

3.d.11 [L3] Nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide dans le pire cas, lien avec la suite de Fibonacci (théorème de Lamé) †. [jury : leçon 142]

3.d.12 [L1] Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

3.d.13 [L3] En degré 2 ou 3 sur un corps, irréductible $\iff$ sans racine. [jury : écrit MG 2025]

3.d.14 [L3] Critère d'Eisenstein $\bigstar$; réduction modulo p ; racines rationnelles p/q d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$: $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

3.d.15 [L3] $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $\varphi(n)$; Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$ $\bigstar$. [jury : écrit MG 2024 ; leçons 125, 141]

3.d.16 [L3] $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien, d'inversibles $\pm 1, \pm i$; théorème des deux carrés †. [jury : leçon 122 ; écrit MG 2021]

Savoir-faire

3.d.17 [L1] Obtenir des coefficients de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu. [jury : option C : sinon, une « laborieuse remontée »]

3.d.18 [L3] Prouver une irréductibilité : absence de racine en degré ≤ 3, Eisenstein (au besoin après $X \mapsto X + 1$, comme pour Φ_p), réduction modulo p, argument de degré d'extension. [jury : leçon 141]

3.d.19 [L3] Lister les irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$. [jury : leçon 141]

3.d.20 [L3] Déterminer les inversibles d'un anneau ($\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[X]$). [jury : leçon 122 : « fondamental »]

3.d.21 [L3] Résoudre une équation diophantienne dans un anneau principal (par exemple $x^2 + y^2 = p$ dans $\mathbb{Z}[i]$). [jury : leçon 122]

Exemples et contre-exemples

3.d.22 [L3] $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{K}[X, Y]$ sont factoriels mais pas principaux. [jury : leçon 122]

3.d.23 [L3] $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel : $6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$.

Pièges relevés par le jury

3.d.24 [L3] Sans racine n'implique pas irréductible en degré ≥ 4 : $(X^2 + 1)^2$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Pour $X^3 - 2$, il faut justifier que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ ou utiliser Eisenstein. [jury : écrit MG 2025]

3.d.25 [L3] Une relation de Bézout entre $f, g \in \mathbb{Z}[t]$ premiers entre eux s'obtient dans $\mathbb{Q}[t]$, qui est principal, pas dans $\mathbb{Z}[t]$. [jury : écrit MG 2020]

3.d.26 [L3] Distinguer le cadre où PGCD et PPCM sont définis (factoriel, principal) et le cadre euclidien qui fournit les algorithmes. [jury : leçon 142]

3.d.27 [L3] A priori, c'est le PPCM de diviseurs qui divise ; pour que leur produit divise, il faut des irréductibles deux à deux non associés. [jury : écrit MG 2020]

3.d.28 [L1] Dans l'algorithme d'Euclide, l'important est la décroissance stricte des restes et la condition d'arrêt. [jury : écrit MG 2020]

3.e Congruences, nombres premiers, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Texte officiel : Congruences dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles, fonction indicatrice d'Euler.

Définitions

3.e.1 [L1] Congruence modulo n ; nombre premier ; valuation p-adique.

3.e.2 [L2] Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$; indicatrice d'Euler φ.

Résultats

3.e.3 [L1] L'ensemble des nombres premiers est infini ★ ; décomposition en facteurs premiers.

3.e.4 [L1] Petit théorème de Fermat ★.

3.e.5 [L2] $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $k \wedge n = 1$; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier ★.

3.e.6 [L2] Théorème d'Euler $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ si $a \wedge n = 1$; $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, multiplicativité de φ ★.

3.e.7 [L3] $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$; théorème de Wilson †.

3.e.8 [L3] Morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (il y en a $n \wedge m$) ; morphisme de Frobenius. [jury : leçon 120]

3.e.9 [L3] Correction du chiffrement RSA ; test de primalité de Fermat, nombres de Carmichael. [jury : leçons 120, 121 ; option C]

3.e.10 [L3] Répartition des nombres premiers : divergence de $\sum 1/p$; théorème des nombres premiers (énoncé) †. [jury : leçon 121 : elle « doit être évoquée » ; écrit AP 2022 consacré à sa démonstration]

Savoir-faire

3.e.11 [L1] Calculer modulo n ; exponentiation rapide.

3.e.12 [L2] Inverser modulo n par l'algorithme d'Euclide étendu ; résoudre un système de congruences.

3.e.13 [L3] Résoudre une équation diophantienne par réduction modulo un entier bien choisi. [jury : leçon 120 ; écrit MG 2023, exercice 2]

Exemples et contre-exemples

3.e.14 [L3] $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ est un nombre de Carmichael : le test de Fermat ne le détecte pas.

3.e.15 [L3] $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ n'est pas cyclique (voir 2.b).

Pièges relevés par le jury

3.e.16 [L2] Si $d \mid n$, $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: le morphisme naturel est la surjection $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. [jury : écrit MG 2023]

3.e.17 [L2] $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas ordonné : des arguments de positivité (« x^2 et y^2 sont positifs dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ») n'ont pas de sens. [jury : écrit MG 2023]

3.e.18 [L1] Vérifier les hypothèses de la version utilisée du petit théorème de Fermat ; un argument de Lagrange ou de Fermat évite souvent des pages de calcul. [jury : écrit MG 2021]

3.f Fractions rationnelles

Texte officiel : Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

Définitions

3.f.1 [L1] $\mathbb{K}(X)$ (sa construction est hors programme en MPSI ; c'est $\mathrm{Frac}(\mathbb{K}[X])$) ; forme irréductible, degré, partie entière, zéros, pôles et multiplicités ; fonction rationnelle associée.

Résultats

3.f.2 [L1] Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ (démonstration hors programme en MPSI) ★ ; généralisation à un corps quelconque avec les facteurs irréductibles du dénominateur [L3] .

3.f.3 [L1] Coefficient d'un pôle simple a de P/Q : $P(a)/Q'(a)$.

3.f.4 [L1] Si P est scindé de racines a_i de multiplicités m_i, $P'/P = \sum_i m_i/(X - a_i)$ ★.

Savoir-faire

3.f.5 [L1] Décomposer pour calculer primitives, dérivées k-ièmes, sommes télescopiques.

3.f.6 [L1] Exploiter parité ou conjugaison pour réduire les calculs.

3.f.7 [L3] Utiliser P'/P pour localiser les racines de P' (théorème de Gauss-Lucas). [jury : leçon 181]

Exemples et contre-exemples

3.f.8 [L1] $\dfrac{1}{X^n-1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \dfrac{\omega}{X-\omega}$.

4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

Bilan des rapports du jury 2020–2025. À l'écrit, ce chapitre intervient surtout par sa partie euclidienne : orthonormalisation de Gram-Schmidt et inégalité de Hadamard, réduction de Gauss des formes quadratiques binaires dans le langage des réseaux (écrit MG 2020) ; adjoint construit par le théorème de Riesz, théorème spectral, décomposition en valeurs singulières, action du groupe orthogonal sur les nilpotents symétriques (écrit MG 2023, où seuls 15 % des candidats ont obtenu la moitié des points de la question menant à la décomposition en valeurs singulières) ; sous-groupes abéliens de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et sous-groupes abéliens finis de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (écrit MG 2024) ; adjoint et norme d'opérateurs sur un espace de Hilbert (écrit AP 2025). Le jury relève aussi que des candidats ne font pas le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques (option B). Formes bilinéaires générales et formes quadratiques ne figurent pas dans les programmes de CPGE : tout y est de niveau L3.

4.a Formes bilinéaires, formes quadratiques

Texte officiel : Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

Définitions

4.a.1 [L3] Forme bilinéaire sur $E\times E$; forme symétrique, antisymétrique, alternée ($b(x,x)=0$).

4.a.2 [L3] Forme quadratique $q(x)=b(x,x)$; forme polaire $b(x,y)=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$ en caractéristique $\neq 2$.

4.a.3 [L3] Orthogonalité relative à b ; orthogonal d'une partie ; noyau $\operatorname{Ker} b = E^\perp$; forme non dégénérée.

4.a.4 [L3] Matrice de b dans une base, $b(x,y) = {}^tXAY$; rang ; discriminant, défini dans $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$. [jury : leçon 103, rapport 2022]

4.a.5 [L3] Adjoint u^* d'un endomorphisme relativement à une forme non dégénérée : $b(u(x),y) = b(x,u^*(y))$.

4.a.6 [L1] Produit scalaire réel : forme bilinéaire symétrique définie positive.

Résultats

4.a.7 [L3] $b\mapsto A$ est un isomorphisme ; b symétrique $\iff {}^tA = A$; en caractéristique $\neq 2$, alternée $\iff$ antisymétrique.

4.a.8 [L3] Changement de base : $A' = {}^tPAP$; le rang ne dépend pas de la base. [jury : écrit MG 2020 : chaque objet a « sa formule de changement de base »]

4.a.9 [L3] b non dégénérée $\iff \det A\neq 0 \iff x\mapsto b(x,\cdot)$ est un isomorphisme $E\to E^*$.

4.a.10 [L3] $\dim F^\perp \geq \dim E - \dim F$, avec égalité et $(F^\perp)^\perp = F$ si b est non dégénérée★.

4.a.11 [L3] Existence et unicité de l'adjoint pour b non dégénérée ; si A est la matrice de b et M celle de u, celle de u^* est $A^{-1}\,{}^tMA$.

4.a.12 [L3] Une forme alternée non dégénérée n'existe qu'en dimension paire ; existence d'une base symplectique†.

Savoir-faire

4.a.13 [L3] Écrire la matrice d'une forme quadratique donnée par une expression (le coefficient de x_ix_j se partage en deux).

4.a.14 [L3] Passer d'une forme quadratique à sa forme polaire, et inversement.

4.a.15 [L3] Faire le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. [jury : option B : lien « pas toujours » fait, « au grand étonnement du jury »]

Exemples et contre-exemples

4.a.16 [L3] $(A,B)\mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: non dégénérée, de signature $(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2})$; $(A,B)\mapsto \operatorname{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.

4.a.17 [L3] Le déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est une forme quadratique (de signature $(2,2)$ sur $\mathbb{R}$).

Pièges relevés par le jury

4.a.18 [L3] La formule de changement de base d'une forme bilinéaire est ${}^tPAP$, pas $P^{-1}AP$: elle dépend de l'objet représenté. [jury : écrit MG 2020]

4.b Orthogonalité, réduction, classification

Texte officiel : Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Procédés d'orthogonalisation.

Définitions

4.b.1 [L3] Vecteur isotrope, cône isotrope ; sous-espace isotrope ($F \cap F^\perp \neq \{0\}$), totalement isotrope ; base orthogonale.

4.b.2 [L3] Forme quadratique réelle positive, définie positive ; signature (s,t).

Résultats

4.b.3 [L3] En caractéristique $\neq 2$, il existe une base orthogonale pour b★.

4.b.4 [L3] Réduction de Gauss : $q = \sum_i \lambda_i \ell_i^2$ avec des formes linéaires ℓ_i linéairement indépendantes★. [jury : leçons 170, 171 : l'algorithme « doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre »]

4.b.5 [L3] Pour b non dégénérée : $E = F \oplus F^\perp \iff b_{|F}$ non dégénérée $\iff F \cap F^\perp = \{0\}$. [jury : leçon 170]

4.b.6 [L3] Théorème d'inertie de Sylvester : la signature ne dépend pas de la base orthogonale choisie ; s est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel q est définie positive★. [jury : leçon 171]

4.b.7 [L3] Classification : sur $\mathbb{C}$ par le rang, sur $\mathbb{R}$ par la signature ; ce sont les orbites de l'action par congruence $(P,A) \mapsto {}^tPAP$. [jury : leçons 157, 170]

4.b.8 [L3] Sur $\mathbb{F}_q$, q impair, classification par le rang et le discriminant†. [jury : leçon 170]

4.b.9 [L3] Critère de Sylvester : A est définie positive si et seulement si ses mineurs principaux dominants sont > 0†.

4.b.10 [L3] Pour une forme non dégénérée de signature (s,t), un sous-espace totalement isotrope est de dimension au plus $\min(s,t)$†.

Savoir-faire

4.b.11 [L3] Mener la réduction de Gauss sur une forme simple, y compris sans terme carré ($xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$), et en lire rang, signature, noyau. [jury : leçons 170, 171]

4.b.12 [L3] Connaître et utiliser isotropie et cône isotrope. [jury : leçon 170 : notions qui « doivent être connues »]

4.b.13 [L3] Relier le discriminant de ax^2+bx+c et la signature de $ax^2+bxy+cy^2$. [jury : leçon 171]

4.b.14 [L3] Voir la hessienne comme une forme quadratique dont la signature renseigne sur les extrema (chapitre 9). [jury : leçon 171]

Exemples et contre-exemples

4.b.15 [L3] $xy+yz+zx$ est de signature $(1,2)$.

4.b.16 [L3] Forme de Minkowski $x^2+y^2+z^2-t^2$: signature $(3,1)$, cône de lumière. [jury : leçon 170]

Pièges relevés par le jury

4.b.17 [L3] Ne pas se limiter au corps $\mathbb{R}$ dans l'étude générale des formes quadratiques. [jury : leçon 170, rapport 2022]

4.c Espaces euclidiens et hermitiens

Texte officiel : Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.

Définitions

4.c.1 [L1] Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien ; norme associée.

4.c.2 [L3] Forme sesquilinéaire hermitienne ; produit scalaire hermitien, espace hermitien (hors programme de MP).

4.c.3 [L1] Orthogonal $F^\perp$, famille orthonormée, base orthonormée.

Résultats

4.c.4 [L1] Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité ★ ; inégalité triangulaire ; identités de polarisation, du parallélogramme ; théorème de Pythagore.

4.c.5 [L1] Orthonormalisation de Gram-Schmidt : pour $(x_1, \dots, x_p)$ libre, il existe une unique famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ avec $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $(e_k|x_k) > 0$ pour tout k ★. [jury : écrit MG 2020, exercice 3 ; écrit MG 2023]

4.c.6 [L1] Existence de bases orthonormées, théorème de la base orthonormée incomplète ; $x = \sum_i (x|e_i)e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_i (x|e_i)^2$.

4.c.7 [L1] Si F est de dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$; projeté orthogonal $p_F(x) = \sum_i (x|e_i)e_i$; $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, unique point réalisant le minimum ★. [jury : leçon 213, rapport 2021 : la formule « doit absolument être connue »]

4.c.8 [L2] Représentation des formes linéaires : $x \mapsto (x|\cdot)$ est un isomorphisme de E euclidien sur E^* ★. [jury : écrit MG 2023, exercice 3]

4.c.9 [L3] Analogues hermitiens (Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt, représentation semi-linéaire des formes linéaires).

4.c.10 [L3] Inégalité de Bessel pour une famille orthonormée ★. [jury : écrit AP 2021, pour une forme hermitienne positive non nécessairement définie]

4.c.11 [L3] Décomposition QR : toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique QR, Q orthogonale, R triangulaire supérieure à diagonale > 0 (Gram-Schmidt sur les colonnes) ★.

Savoir-faire

4.c.12 [L1] Orthonormaliser une famille de polynômes pour $(P, Q) \mapsto \int PQ$.

4.c.13 [L1] Calculer une distance à un sous-espace, par exemple $\inf_{a,b} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x$.

4.c.14 [L1] Montrer $\|x - p_F(x)\| \leq \|x\|$ et inégalités analogues par Pythagore. [jury : écrit MG 2020 : point-clé à démontrer, non à affirmer]

4.c.15 [L2] Définir un adjoint entre deux espaces euclidiens par le théorème de Riesz, en plaçant correctement le quantificateur. [jury : écrit MG 2023]

Exemples et contre-exemples

4.c.16 [L1] Polynômes de Legendre (orthonormalisation de $(1, X, X^2, \dots)$ pour $\int_{-1}^1 PQ$).

4.c.17 [L3] En dimension infinie, $E = F \oplus F^\perp$ peut tomber en défaut si F n'est pas fermé (voir 8.3).

Pièges relevés par le jury

4.c.18 [L1] Dans Gram-Schmidt, justifier à chaque étape que le vecteur construit est non nul ; écrire « c'est la construction de Gram-Schmidt » ne suffit pas. [jury : écrit MG 2020]

4.c.19 [L1] Le procédé de Gram-Schmidt modifie en général les vecteurs : il ne les laisse inchangés que s'ils forment déjà une famille orthonormée. [jury : écrit MG 2023]

4.c.20 [L1] La norme d'une somme de vecteurs orthogonaux se calcule par Pythagore, $\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$: ne pas confondre avec une somme de normes. [jury : écrit AP 2025 : question qui a mis « en grande difficulté une large majorité de candidats »]

4.c.21 [L1] Pour $x \neq 0$, c'est la stricte positivité $(x|x) > 0$ qui sert, pas seulement $(x|x) \geq 0$. [jury : écrit MG 2023]

4.d Groupe orthogonal, endomorphismes remarquables, réduction

Texte officiel : Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Décomposition en valeurs singulières d'une matrice à coefficients réels. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Espaces vectoriels euclidiens de dimension deux, classification des éléments de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$. *Espaces vectoriels euclidiens de dimension trois, classification des éléments de* $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ *; produit mixte, produit vectoriel.*

Définitions

4.d.1 [L2] $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; réflexion ; renversement [L3] .

4.d.2 [L2] Adjoint dans un espace euclidien ; endomorphisme autoadjoint (symétrique), positif, défini positif ; $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4.d.3 [L3] Endomorphisme normal ($uu^* = u^*u$), antisymétrique.

4.d.4 [L3] Valeurs singulières ; décomposition en valeurs singulières ; décomposition polaire.

4.d.5 [L3] Produit mixte $[u,v,w] = \det_{\mathcal{B}}(u,v,w)$ dans une base orthonormée directe ; produit vectoriel.

Résultats

4.d.6 [L2] $u \in \mathrm{O}(E) \iff u$ conserve le produit scalaire $\iff u$ envoie une base orthonormée sur une base orthonormée $\iff u^* = u^{-1}$; $\det u = \pm 1$.

4.d.7 [L2] Si F est stable par u, $F^\perp$ est stable par u^* ★. [jury : leçon 158 : à « mettre en valeur »]

4.d.8 [L2] Réduction des isométries : matrice diagonale par blocs formée de ± 1 et de blocs de rotation en base orthonormée ★. [jury : leçon 158 : « incontournable »]

4.d.9 [L3] Tout élément de $\mathrm{O}(E)$ est produit d'au plus n réflexions (Cartan-Dieudonné) ★ ; pour $n \geq 3$, $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les renversements †. [jury : leçons 148, 191]

4.d.10 [L2] Théorème spectral : u est autoadjoint si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormée ★. [jury : leçon 157 : « indispensable » ; leçon 158 : « incontournable »]

4.d.11 [L2] $u \in S^+(E) \iff \mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}_+$; $u \in S^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}_+^*$.

4.d.12 [L3] Racine carrée : tout $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ a une unique racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ ★ ; décomposition de Cholesky $A = {}^tTT$ †. [jury : leçon 157]

4.d.13 [L3] Un endomorphisme normal d'un espace euclidien est diagonal par blocs (1×1 et $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$) en base orthonormée †. [jury : leçons 151, 158]

4.d.14 [L3] Décomposition en valeurs singulières : $A = U\Sigma\, {}^tV$ avec U, V orthogonales, les valeurs singulières étant les racines des valeurs propres de ${}^tAA$; le rang est le nombre de valeurs singulières non nulles ★. [jury : écrit MG 2023 ; leçons 148, 157]

4.d.15 [L3] Réduction simultanée : si q est définie positive, il existe une base q-orthonormée et q'-orthogonale ★. [jury : leçons 157, 171 : résultat « important »]

4.d.16 [L3] Décomposition polaire : $(O,S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ★. [jury : leçon 155]

4.d.17 [L3] $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact ; tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ †. [jury : leçon 103, rapport 2022]

4.d.18 [L2] $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$: rotations R_θ et réflexions ; $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$ est commutatif ; $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, et une réflexion conjugue R_θ en $R_{-\theta}$. [jury : écrit MG 2024]

4.d.19 [L3] Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$: cycliques ; de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$: cycliques ou diédraux ★. [jury : écrit MG 2024, qui étudie les sous-groupes abéliens de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$]

4.d.20 [L2] $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$: tout élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est une rotation d'axe et d'angle donnés ; un élément de $\mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$ est la composée d'une rotation et d'une réflexion d'hyperplan orthogonal à l'axe ★.

4.d.21 [L3] Rotation de $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{Tr}\, u = 1 + 2\cos\theta$, signe de $\sin\theta$ donné par $[x, u(x), a]$ (a vecteur de l'axe orienté) ; produit vectoriel : $\|u \wedge v\|^2 + (u|v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$, double produit vectoriel.

4.d.22 [L3] Quotient de Rayleigh : $\lambda_{\min} \leq \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} \leq \lambda_{\max}$; théorème de Courant-Fischer †.

Savoir-faire

4.d.23 [L2] Diagonaliser une matrice symétrique réelle en base orthonormée.

4.d.24 [L3] Démontrer la décomposition en valeurs singulières à partir du théorème spectral appliqué à ${}^tAA$. [jury : écrit MG 2023 : sans le théorème spectral, pas de « réponse viable »]

4.d.25 [L3] Résoudre un problème de moindres carrés : $\min \|AX - B\|$ est atteint aux solutions de ${}^tAAX = {}^tAB$, unique si A est de rang plein. [jury : leçons 148, 158]

4.d.26 [L2] Reconnaître une rotation de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'axe et l'angle.

4.d.27 [L3] Décrire des orbites : action de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par conjugaison sur $S_n(\mathbb{R})$ (spectre), action de $\mathrm{O}_r(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ (valeurs singulières). [jury : écrit MG 2023]

4.d.28 [L3] Interpréter géométriquement la décomposition en valeurs singulières (image de la boule unité). [jury : leçon 191]

Exemples et contre-exemples

4.d.29 [L2] Projecteurs orthogonaux (les projecteurs autoadjoints), réflexions, rotations.

4.d.30 [L3] Une matrice symétrique réelle nilpotente est nulle ; $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique complexe nilpotente non nulle. [jury : écrit MG 2023]

4.d.31 [L3] Matrices de Gram (dont la matrice de Hilbert $(1/(i+j-1))$) et matrices de covariance : symétriques positives. [jury : leçon 157]

Pièges relevés par le jury

4.d.32 [L2] De $\langle v, x\rangle = 0$ pour *un* x on ne déduit pas $v = 0$ par non-dégénérescence (il faudrait tout y). Pour $\operatorname{Ker} u^*u \subset \operatorname{Ker} u$, écrire $\|u(x)\|^2 = \langle u^*u(x), x\rangle = 0$. [jury : écrit MG 2023]

4.d.33 [L3] Dans la construction de la décomposition en valeurs singulières, l'orthonormalité des $u(e_i)/\sqrt{\lambda_i}$ se vérifie par le calcul ; un argument d'isométrie sur chaque sous-espace propre séparément ne suffit pas. [jury : écrit MG 2023]

4.d.34 [L2] Pour passer du cadre matriciel à un endomorphisme d'espaces euclidiens abstraits, choisir des bases orthonormées. [jury : écrit MG 2023]

4.e Groupe unitaire, endomorphismes normaux

Texte officiel : Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Définitions

4.e.1 [L3] $\mathrm{U}(E)$, $\mathrm{SU}(E)$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{M : M^*M = I_n\}$; adjoint hermitien ; endomorphismes hermitiens, normaux.

Résultats

4.e.2 [L3] $u \in \mathrm{U}(E) \iff u$ conserve le produit scalaire hermitien $\iff u^* = u^{-1}$; $|\det u| = 1$, valeurs propres de module 1.

4.e.3 [L3] Théorème de Schur : toute matrice complexe est trigonalisable en base orthonormée ★.

4.e.4 [L3] Un endomorphisme d'un espace hermitien est normal si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormée ★. [jury : leçons 151, 158]

4.e.5 [L3] Parmi les normaux : hermitiens $\iff$ spectre réel ; unitaires $\iff$ spectre dans $\mathbb{U}$.

4.e.6 [L3] Décomposition polaire : homéomorphisme $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ★.

4.e.7 [L3] $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est compact et connexe par arcs ; $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ s'identifie aux quaternions de norme 1 †.

Savoir-faire

4.e.8 [L3] Diagonaliser une matrice normale en base orthonormée ; en déduire la réduction réelle des endomorphismes normaux et orthogonaux.

Exemples et contre-exemples

4.e.9 [L3] La matrice de Fourier $\frac{1}{\sqrt{n}}(\omega^{jk})_{j,k}$ est unitaire ; elle diagonalise les matrices circulantes, qui sont normales. [jury : leçon 153]

4.e.10 [L3] $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas normale.

5 Géométries affine et euclidienne

Texte officiel : Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

Bilan des rapports du jury 2020–2025. À l'écrit, la géométrie apparaît surtout à travers les groupes et l'algèbre bilinéaire : sous-groupes abéliens de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ (écrit MG 2024) ; réseaux du plan et réduction de Gauss des formes binaires (écrit MG 2020, partie IV, où « quelques copies convainquent sans calculs ou presque grâce à un dessin bien commenté »). Les attendus précis viennent des commentaires de leçons : la classification des isométries en dimension 2 et 3 est « exigible » (leçon 161), les barycentres sont « incontournables » (leçon 181), les propriétés classiques des coniques « doivent être connues » (leçon 171). Les programmes de CPGE ne contiennent que les sous-espaces affines d'un espace vectoriel et les similitudes directes vues avec les nombres complexes : presque tout ce chapitre est de niveau L3.

5.a Espaces affines, barycentres, convexité

Texte officiel : Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

Définitions

5.a.1 [L1] Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction ; espace affine abstrait $\mathcal{E}$ de direction $\vec{E}$ [L3] .

5.a.2 [L3] Application affine f, partie linéaire $\vec{f}$; groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$; propriété affine (invariante par $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$).

5.a.3 [L3] Barycentre d'une famille de points pondérés ; coordonnées barycentriques ; repère affine, repère cartésien.

5.a.4 [L3] Translations, homothéties, groupe des homothéties-translations ; affinité de base H, de direction D et de rapport λ.

5.a.5 [L2] Partie convexe ; enveloppe convexe, point extrémal [L3] .

Résultats

5.a.6 [L3] f est affine si et seulement si elle conserve les barycentres ★ ; une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine.

5.a.7 [L3] Le sous-espace affine engendré par une partie est l'ensemble des barycentres de ses points ; équations d'un sous-espace affine dans un repère.

5.a.8 [L3] $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme surjectif $\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \to \mathrm{GL}(\vec{E})$ de noyau le groupe des translations ; les homothéties-translations, $\{f : \vec{f} \in \mathbb{K}^*\mathrm{id}\}$, forment un sous-groupe distingué. [jury : leçon 103, rapport 2022]

5.a.9 [L3] Si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, f a un unique point fixe.

5.a.10 [L3] Théorèmes de Thalès, Ménélaüs, Céva, Pappus, Desargues (énoncés affines) †. [jury : leçon 191]

5.a.11 [L3] L'enveloppe convexe d'une partie est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ses points ; en dimension n, $n+1$ points suffisent (Carathéodory) †. [jury : leçon 181]

5.a.12 [L3] Un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Minkowski) †. [jury : leçon 181]

5.a.13 [L3] Théorème de Gauss-Lucas : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P ★. [jury : leçon 181 : il y « trouve parfaitement sa place »]

5.a.14 [L3] Séparation d'un point et d'un convexe fermé par un hyperplan ; théorèmes de Helly, de Farkas †. [jury : leçons 181, 191]

5.a.15 [L3] Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. [jury : leçon 181]

Savoir-faire

5.a.16 [L3] Utiliser les coordonnées barycentriques dans un triangle (centre de gravité, centre du cercle inscrit de coordonnées $(a : b : c)$) et pour décrire des lignes de niveau. [jury : leçon 181 : notion « incontournable », rapport 2022]

5.a.17 [L3] Ramener une propriété affine à une configuration simple (tout triangle est l'image affine d'un triangle équilatéral).

5.a.18 [L3] Dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points du plan. [jury : leçon 181]

5.a.19 [L3] Déterminer la nature et les points fixes d'une application affine à partir de sa partie linéaire.

Exemples et contre-exemples

5.a.20 [L3] Projections, symétries et affinités affines.

5.a.21 [L3] Points extrémaux de la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (les sommets) et de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ (les $\pm e_i$) ; ceux de la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme subordonnée euclidienne forment $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ †.

5.a.22 [L3] Le cône $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe ; $\log\det$ est concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$. [jury : leçon 181]

5.b Isométries et similitudes

Texte officiel : Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.

Définitions

5.b.1 [L3] Espace affine euclidien ; isométrie (application conservant les distances) ; groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$; déplacement ($\vec{f} \in \mathrm{SO}(\vec{E})$), antidéplacement.

5.b.2 [L1] Similitude directe du plan, $z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$) ; similitude indirecte $z \mapsto a\bar{z} + b$ [L3] ; rapport.

5.b.3 [L3] Réflexion, rotation, symétrie glissée ; en dimension 3, vissage et antirotation.

Résultats

5.b.4 [L3] Une application d'un espace affine euclidien dans lui-même qui conserve les distances est affine ★. [jury : leçon 161 : « il faut savoir justifier »]

5.b.5 [L3] Les déplacements forment un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

5.b.6 [L3] Toute isométrie de $\mathcal{E}$ ($\dim \mathcal{E} = n$) est produit d'au plus $n+1$ réflexions ★. [jury : leçon 161 : donner des générateurs]

5.b.7 [L3] Forme réduite : toute isométrie s'écrit de façon unique $t_u \circ g$ avec g ayant un point fixe, $\vec{g}(u) = u$ et $t_u \circ g = g \circ t_u$ ★.

5.b.8 [L3] Composée de deux réflexions : translation (axes parallèles) ou rotation d'angle double (axes sécants) ★.

5.b.9 [L3] Classification en dimension 2 : identité, translations, rotations, réflexions, symétries glissées ★. [jury : leçon 161 : « exigible »]

5.b.10 [L3] Classification en dimension 3 : translations, rotations, vissages ; réflexions, symétries glissées, antirotations (dont les symétries centrales) ★. [jury : leçon 161 : « exigible »]

5.b.11 [L1] Une similitude directe $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 1$ a un unique point fixe et est la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

Savoir-faire

5.b.12 [L3] Composer des isométries affines, en passant par leurs décompositions en réflexions. [jury : leçon 161]

5.b.13 [L3] Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une isométrie donnée analytiquement.

5.b.14 [L1] Utiliser l'écriture complexe des similitudes.

Exemples et contre-exemples

5.b.15 [L3] La composée de deux rotations du plan est une rotation ou une translation ; $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas commutatif.

5.c Angles en dimension deux

Texte officiel : Angles en dimension deux : angles de vecteurs, angles de droites, théorème de l'angle inscrit, cocyclicité.

Définitions

5.c.1 [L2] Angle orienté de vecteurs, identifié à un élément de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$; mesure modulo 2π.

5.c.2 [L3] Angle orienté de droites, mesure modulo π.

5.c.3 [L1] Angle géométrique $\theta \in [0, \pi]$ avec $\cos\theta = \frac{(u|v)}{\|u\|\|v\|}$.

Résultats

5.c.4 [L3] Relation de Chasles pour les angles de vecteurs et de droites.

5.c.5 [L3] Angle au centre et angle inscrit : $(\vec{MA}, \vec{MB})$ et $(\vec{OA}, \vec{OB})$ (mesures modulo 2π) sont liés par un facteur 2 ; cas limite de l'angle entre corde et tangente.

5.c.6 [L3] Théorème de l'angle inscrit : quatre points distincts A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(CA, CB) = (DA, DB)$ modulo π ★.

5.c.7 [L3] Avec les affixes : A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel ★. [jury : leçon 191 : le birapport parmi les invariants fondamentaux]

Savoir-faire

5.c.8 [L3] Démontrer une cocyclicité par les angles de droites ou par le birapport.

5.c.9 [L3] Utiliser une inversion pour ramener des cercles à des droites (inégalité et égalité de Ptolémée) †. [jury : leçon 191]

5.d Figures du plan et de l'espace, nombres complexes

Texte officiel : Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

Définitions

5.d.1 [L3] Groupe $\mathrm{Isom}(A)$ des isométries laissant stable une partie A.

5.d.2 [L3] Polygone régulier convexe à n côtés.

Résultats

5.d.3 [L3] Une isométrie qui stabilise une partie finie fixe son isobarycentre ; $\mathrm{Isom}(A)$ s'identifie alors à un sous-groupe d'un groupe orthogonal.

5.d.4 [L3] Le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés est le groupe diédral D_n, d'ordre $2n$ ★(voir 2.a).

5.d.5 [L3] Un sous-groupe fini de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est cyclique ou diédral ★.

5.d.6 [L1] Relations métriques : formule d'Al-Kashi, loi des sinus $a/\sin\hat{A} = 2R$, formule de Héron †.

5.d.7 [L1] Nombres complexes : A, B, C alignés $\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$; $(AB) \perp (AC) \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$; ABC équilatéral direct $\iff a + jb + j^2c = 0$ ★.

5.d.8 [L3] Constructibilité des polygones réguliers (Gauss-Wantzel) †. [jury : leçon 102]

5.d.9 [L3] L'inversion transforme cercles et droites en cercles et droites ; les homographies conservent le birapport †. [jury : leçons 101, 191]

Savoir-faire

5.d.10 [L3] Déterminer le groupe des isométries d'une figure (polygone, polyèdre) par son action sur les sommets. [jury : leçons 101, 104]

5.d.11 [L1] Résoudre un problème de géométrie plane avec les complexes (théorème de Napoléon, centre d'une similitude).

Exemples et contre-exemples

5.d.12 [L3] Le groupe des isométries d'un rectangle non carré est isomorphe à $V_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

5.e Coniques et quadriques

Texte officiel : Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension trois.

Définitions

5.e.1 [L3] Conique propre de foyer F, de directrice D et d'excentricité e : $MF = e\,d(M, D)$; ellipse ($e < 1$), parabole ($e = 1$), hyperbole ($e > 1$) ; équations réduites.

5.e.2 [L3] Quadrique de l'espace : lieu des zéros d'un polynôme de degré 2 ; ellipsoïde, hyperboloïdes à une et à deux nappes, paraboloïdes elliptique et hyperbolique, cônes, cylindres.

Résultats

5.e.3 [L3] Réduction de $q(x) + \ell(x) + c = 0$: on diagonalise q en base orthonormée (théorème spectral) puis on translate ; la nature dépend de la signature et du rang de q ★. [jury : leçon 171]

5.e.4 [L3] Définitions bifocales : $MF + MF' = 2a$ pour l'ellipse, $|MF - MF'| = 2a$ pour l'hyperbole ★.

5.e.5 [L3] L'excentricité est invariante par similitude. [jury : leçon 191]

5.e.6 [L3] La classification des quadriques n'est pas exigible, mais des situations particulières doivent pouvoir être discutées. [jury : leçon 171]

5.e.7 [L3] L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont doublement réglés †.

Savoir-faire

5.e.8 [L3] Réduire l'équation d'une conique ou d'une quadrique et en déterminer nature, centre, axes, foyers. [jury : leçon 171 : définition et propriétés classiques « doivent être connues »]

5.e.9 [L3] Relier le signe de $b^2 - 4ac$, la signature de $ax^2 + bxy + cy^2$ et le type de conique. [jury : leçon 171]

5.e.10 [L3] Étudier la position d'une surface par rapport à son plan tangent avec la hessienne (voir 9.3).

Exemples et contre-exemples

5.e.11 [L3] $xy = 1$ (hyperbole équilatère), $x^2 + xy + y^2 = 1$ (ellipse), $z = xy$ (paraboloïde hyperbolique).

6 Analyse à une variable réelle

Bilan des rapports du jury 2020–2025. Ce chapitre fournit les premières questions de presque tous les sujets d'analyse et probabilités, et c'est là que se joue une bonne part de la note : critère des séries alternées, convergence uniforme, intégrale de $\sin x/x$ (écrit AP 2020) ; convergence d'une intégrale (écrit AP 2021) ; intégration par parties impropre, dérivation terme à terme, encadrement série-intégrale (écrit AP 2022 : « plus de la moitié des candidats a été mise en grande difficulté par ces techniques », pourtant « traitées en L2 ») ; formules de Taylor, intégrales de Wallis, notation $\sim$ (écrit AP 2023) ; théorème fondamental de l'analyse et intégration par parties généralisée (écrit AP 2025). Le principe rappelé chaque année : « un objet défini par une intégrale, une limite ou comme la somme d'une série, n'a d'existence et de sens que si la convergence a été (préalablement) établie » (écrit AP 2020).

6.1 Nombres réels

Texte officiel : Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbb{R}$. Parties connexes de $\mathbb{R}$.

Définitions

6.1.1 [L1] Propriété de la borne supérieure ; partie entière ; partie dense de $\mathbb{R}$; droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

6.1.2 [L2] Voisinage, ouvert, fermé, adhérence de $\mathbb{R}$; valeur d'adhérence d'une suite.

6.1.3 [L1] Suite convergente, suite extraite ; suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$; suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

6.1.4 [L3] Limites inférieure et supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

6.1.5 [L3] Suite de Cauchy (hors programme de MP).

Résultats

6.1.6 [L1] Théorème de la limite monotone ; suites adjacentes ; segments emboîtés.

6.1.7 [L1] Théorème de Bolzano-Weierstrass ★. [jury : leçon 223 : « savoir démontrer »]

6.1.8 [L3] Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$ ou sont denses★ ; $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$. [jury : leçon 223, rapport 2021]

6.1.9 [L3] $\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$; (u_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$. [jury : leçon 223 : elles permettent des « rédactions expurgées d'epsilons superflus »]

6.1.10 [L3] $\mathbb{R}$ est complet : une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy★.

6.1.11 [L2] Une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

6.1.12 [L2] Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés★ ; propriété de Borel-Lebesgue d'un segment [L3] ★.

6.1.13 [L2] Les connexes (par arcs) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles★.

6.1.14 [L2] Théorème de Cesàro★. [jury : leçon 223 : « savoir démontrer »]

6.1.15 [L1] Pour $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue : si (u_n) converge, sa limite est un point fixe ; si f est croissante, (u_n) est monotone ; point fixe attractif si $|f'(\ell)| < 1$, répulsif si $|f'(\ell)| > 1$. [jury : leçon 226]

6.1.16 [L3] Vitesse : géométrique si $0 < |f'(\ell)| < 1$, au moins quadratique si $f'(\ell) = 0$ (méthode de Newton, voir 12.2).

Savoir-faire

6.1.17 [L1] Étudier $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, points fixes, monotonie, limite.

6.1.18 [L2] Trouver un équivalent par une suite auxiliaire et Cesàro, par exemple $u_n \sim \sqrt{3/n}$ pour $u_{n+1} = \sin u_n$; l'analogie avec une équation différentielle suggère la suite auxiliaire. [jury : leçon 226 : exemples « si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$ »]

6.1.19 [L1] Étudier une suite arithmético-géométrique en se ramenant à la suite $u_n - \ell$. [jury : écrit MG 2020 : ce réflexe « ne semble plus faire partie de la culture mathématique des candidats »]

6.1.20 [L3] Démontrer une convergence par lim inf et lim sup (lemme de Fekete†).

Exemples et contre-exemples

6.1.21 [L3] L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin n)$ est $[-1, 1]$.

6.1.22 [L1] $((-1)^n)$ a deux valeurs d'adhérence ; une suite non bornée peut avoir une seule valeur d'adhérence sans converger ($u_{2n} = 0$, $u_{2n+1} = n$).

Pièges relevés par le jury

6.1.23 [L3] Si une limite existe, elle est égale à la limite inférieure ; mais on ne peut pas présupposer l'existence de la limite. [jury : écrit AP 2022]

6.1.24 [L1] Manipuler correctement bornes supérieure et inférieure (non-vacuité, minoration, inégalités). [jury : écrit AP 2022 : « manque d'aisance des candidats avec la notion de borne inférieure »]

6.1.25 [L1] Être majorée par une suite décroissante ne rend pas une suite décroissante. [jury : écrit AP 2020]

6.2 Séries numériques

Texte officiel : Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

Définitions

6.2.1 [L1] Série, sommes partielles, convergence, somme, reste ; convergence absolue.

6.2.2 [L1] Séries géométriques, séries de Riemann ; séries de Bertrand [L3] †.

6.2.3 [L1] Produit de Cauchy ; familles sommables de réels positifs et de complexes.

Résultats

6.2.4 [L1] Le terme général d'une série convergente tend vers 0 ; lien suite-série (séries télescopiques).

6.2.5 [L1] Séries à termes positifs : convergence $\iff$ sommes partielles majorées ; comparaison par $\leq$, O, $\sim$.

6.2.6 [L1] $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$★.

6.2.7 [L1] Une série absolument convergente converge★.

6.2.8 [L1] Théorème des séries alternées : si (u_n) décroît vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge, et le reste R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ avec $|R_n| \leq u_{n+1}$ ★. [jury : écrit AP 2020 : il a « trois hypothèses » et « deux conclusions »]

6.2.9 [L2] Sommation des relations de comparaison pour une série de référence positive : restes dans le cas convergent, sommes partielles dans le cas divergent ★.

6.2.10 [L2] Comparaison série-intégrale : pour f monotone, encadrement de $\sum f(k)$ par des intégrales ★. [jury : écrit AP 2022 : encadrement « tout simplement ignoré »]

6.2.11 [L2] Règle de d'Alembert.

6.2.12 [L1] Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes converge absolument vers le produit des sommes ★.

6.2.13 [L3] Transformation d'Abel ; critère de Dirichlet : $\sum a_n b_n$ converge si les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées et si (b_n) décroît vers 0 ★. [jury : leçon 230, rapport 2021 ; écrit AP 2020]

6.2.14 [L1] Familles sommables : sommation par paquets, théorème de Fubini (démonstrations hors programme en MPSI).

6.2.15 [L3] Une série semi-convergente réelle peut être réordonnée pour converger vers n'importe quel réel (Riemann) †.

6.2.16 [L1] $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ ★ ; formule de Stirling ★.

Savoir-faire

6.2.17 [L1] Étudier une série par comparaison ou par équivalent, après avoir vérifié le signe constant.

6.2.18 [L2] Estimer restes et sommes partielles : $\sum_{k>n} 1/k^2 \sim 1/n$, $\sum_{k\leq n} 1/\sqrt{k} \sim 2\sqrt{n}$. [jury : leçon 230]

6.2.19 [L2] Obtenir un développement asymptotique de suite récurrente par télescopage. [jury : leçon 230]

6.2.20 [L3] Calculer des sommes avec des séries entières ou des séries de Fourier ($\zeta(2) = \pi^2/6$). [jury : leçon 230 ; écrit AP 2023, qui calcule les $\zeta(2k)$]

Exemples et contre-exemples

6.2.21 [L1] $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}/n = \ln 2$: convergente, non absolument.

6.2.22 [L3] $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ converge, mais son produit de Cauchy par elle-même diverge.

6.2.23 [L3] $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge alors que son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$: les équivalents ne servent que pour des termes de signe constant.

Pièges relevés par le jury

6.2.24 [L1] On n'écrit $\sum a_n < +\infty$ que pour des termes positifs ; écrire $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ avant d'avoir prouvé la convergence absolue est « abusif » et sanctionné. [jury : écrit AP 2020]

6.2.25 [L1] Séparer termes pairs et impairs demande la convergence absolue (sommation par paquets). [jury : écrit AP 2020]

6.2.26 [L3] Le critère des séries alternées et celui d'Abel ne s'appliquent pas directement à $\sum(-1)^n/n^s$ pour s complexe. [jury : écrit AP 2020]

6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles

6.3.a Continuité

Texte officiel : Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

Définitions

6.3.a.1 [L1] Limite (finie ou infinie, en un point ou à l'infini), limites à gauche et à droite ; continuité ; prolongement par continuité.

6.3.a.2 [L1] Fonction lipschitzienne, uniformément continue.

Résultats

6.3.a.3 [L1] Caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité.

6.3.a.4 [L1] Théorème des valeurs intermédiaires★ ; l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

6.3.a.5 [L1] Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes★ ; l'image d'un segment est un segment.

6.3.a.6 [L1] Théorème de Heine★. [jury : leçon 203, rapport 2021 : démonstration qui « doit être connue »]

6.3.a.7 [L1] Théorème de la limite monotone pour les fonctions★ ; l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable [L3] ★. [jury : leçon 229, rapport 2021 : énoncé et preuve « attendus »]

6.3.a.8 [L1] Une fonction monotone sur un intervalle est continue si et seulement si son image est un intervalle★.

6.3.a.9 [L1] Une fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone ; sa réciproque est continue★.

Savoir-faire

6.3.a.10 [L1] Montrer l'existence d'une solution par le théorème des valeurs intermédiaires, l'unicité par la stricte monotonie.

6.3.a.11 [L1] Déterminer $f(I)$ par double inclusion, l'inclusion réciproque venant du théorème des valeurs intermédiaires. [jury : écrit AP 2020 : inclusion réciproque « très souvent omise »]

6.3.a.12 [L1] Prolonger par continuité (par exemple $x \mapsto \sin x/x$ en 0). [jury : ancienne leçon « Prolongement de fonctions », rapport 2021 : ces résultats élémentaires sont mal connus]

6.3.a.13 [L3] Résoudre l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour f continue : $\mathbb{Q}$-linéarité (entiers négatifs compris), puis densité de $\mathbb{Q}$ et continuité. [jury : écrit AP 2022]

Exemples et contre-exemples

6.3.a.14 [L1] $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0 ; $x \mapsto x\sin(1/x)$ se prolonge par continuité.

6.3.a.15 [L3] Fonction monotone discontinue en tout rationnel : $x \mapsto \sum_n 2^{-n}\mathbf{1}_{[q_n,+\infty[}(x)$ où (q_n) énumère $\mathbb{Q}$.

Pièges relevés par le jury

6.3.a.16 [L1] Être définie en un point n'est pas être continue en ce point ; justifier une discontinuité explicitement. [jury : écrits AP 2020, 2022]

6.3.a.17 [L1] Un argument de densité exige une continuité qui doit être une hypothèse. [jury : écrit AP 2022 : « une continuité qui n'est pas supposée »]

6.3.b Dérivabilité, formules de Taylor, développements limités

Texte officiel : Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Étude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral (Taylor-Laplace), formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

Définitions

6.3.b.1 [L1] Dérivée en un point, à gauche, à droite ; fonction dérivable ; classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$; classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux [L3] .

6.3.b.2 [L1] Relations de comparaison o, O, $\sim$; développement limité ; développement asymptotique.

Résultats

6.3.b.3 [L1] Dérivée d'une composée, d'une réciproque $(f' \neq 0)$★ ; formule de Leibniz★.

6.3.b.4 [L1] En un point intérieur, un extremum local est un point critique (condition seulement nécessaire).

6.3.b.5 [L1] Théorème de Rolle★ ; égalité et inégalité des accroissements finis ; caractérisation des fonctions monotones par le signe de f'. [jury : leçon 203, rapport 2021 : démonstration de Rolle qui « doit être connue »]

6.3.b.6 [L1] Théorème de la limite de la dérivée★.

6.3.b.7 [L3] Théorème de Darboux : une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ★. [jury : leçon 228, rapport 2021]

6.3.b.8 [L1] Formules de Taylor : Taylor-Young, reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange ; l'égalité de Taylor-Lagrange (hors programme en MPSI) est de niveau [L3] . [jury : écrit AP 2023 : formules « régulièrement énoncées de manière erronée »]

6.3.b.9 [L1] Si f est $\mathcal{C}^n$, elle a un développement limité d'ordre n ; un développement limité d'ordre 1 équivaut à la dérivabilité, mais l'existence d'un développement limité d'ordre 2 n'implique pas la double dérivabilité. [jury : leçon 218 : ce lien « doit être connu »]

6.3.b.10 [L3] Une fonction dont on contrôle les dérivées ($|f^{(n)}| \leq CM^n n!$ sur un voisinage) est développable en série entière (reste de Taylor). [jury : leçon 218 ; leçon 243, rapport 2021 : résultat « souvent méconnu »]

6.3.b.11 [L3] Théorème de Borel : toute suite de réels est la suite des dérivées en 0 d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ †. [jury : leçon 228]

6.3.b.12 [L3] Inégalités de Kolmogorov-Landau, par exemple $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ sur $\mathbb{R}$ †. [jury : leçon 218]

Savoir-faire

6.3.b.13 [L1] Calculer des développements limités (somme, produit, composition, quotient, intégration) et des développements asymptotiques, y compris de suites implicites (x_n solution de $\tan x = x$ dans $]n\pi, n\pi + \pi/2[$). [jury : leçon 224]

6.3.b.14 [L1] Utiliser un développement limité pour une limite, un équivalent, la position relative d'une courbe et de sa tangente.

6.3.b.15 [L1] Obtenir une majoration globale par l'inégalité des accroissements finis ou de Taylor-Lagrange. [jury : écrit AP 2020]

6.3.b.16 [L3] Analyser le reste d'une formule de Taylor, en distinguant o et O. [jury : leçon 218 : analyse « crucial[e] »]

Exemples et contre-exemples

6.3.b.17 [L1] $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par 0 est dérivable, de dérivée discontinue en 0. [jury : leçon 228, rapport 2021 : il faut « disposer d'un exemple »]

6.3.b.18 [L1] $x \mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par 0 est $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées sont nulles en 0, et elle n'est pas développable en série entière en 0.

6.3.b.19 [L3] $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ a un développement limité d'ordre 2 en 0 sans être deux fois dérivable en 0.

Pièges relevés par le jury

6.3.b.20 [L1] Une dérivée nulle en un point n'implique pas un extremum ; le signe d'une dérivée s'obtient en résolvant une inéquation. [jury : écrit AP 2022]

6.3.b.21 [L1] $\cos t \sim 1 - t^2/2$ en 0 est vrai mais sans intérêt ($\cos t \sim 1 - t^{2023}$ l'est aussi) : un équivalent ne retient que le terme principal ; écrire $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^3)$. [jury : écrit AP 2023]

6.3.b.22 [L1] Un développement limité en x_0 ne donne qu'une majoration au voisinage de x_0. [jury : écrit AP 2020]

6.3.b.23 [L3] Ne pas confondre o et O. [jury : leçon 218, rapport 2023]

6.4 Fonctions usuelles

Texte officiel : Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

Définitions

6.4.1 [L1] exp, ln, $x \mapsto a^x$, $x \mapsto x^\alpha$; cos, sin, tan ; ch, sh, th ; arcsin, arccos, arctan.

6.4.2 [L3] argsh, argch, argth (hors programme de MPSI).

Résultats

6.4.3 [L1] Dérivées, variations, limites ; croissances comparées ★ ; $\ln(1+x) \leq x$, $e^x \geq 1 + x$.

6.4.4 [L1] $\arcsin' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $\arctan' = 1/(1+x^2)$; $\arctan x + \arctan(1/x) = \pm\pi/2$.

6.4.5 [L3] $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

6.4.6 [L1] Développements limités usuels en 0.

6.4.7 [L3] Les solutions continues de $f(x+y) = f(x)f(y)$ non nulles sont les $x \mapsto e^{ax}$ ★.

6.4.8 [L3] Plusieurs définitions possibles de l'exponentielle (série entière, solution de $y' = y$, réciproque de ln) : choisir un point de vue et s'y tenir. [jury : leçon 243, rapport 2021]

Savoir-faire

6.4.9 [L1] Calculer les dérivées des fonctions usuelles, tracer leurs graphes, étudier leur comportement aux bornes. [jury : leçon 228, rapport 2021]

6.5 Intégration

6.5.a Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

Texte officiel : Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.

Définitions

6.5.a.1 [L1] Fonction en escalier, fonction continue par morceaux sur un segment ; intégrale ; somme de Riemann ; primitive.

Résultats

6.5.a.2 [L1] Linéarité, relation de Chasles, positivité, $|\int f| \leq \int |f|$; inégalité de la moyenne ; inégalité de Cauchy-Schwarz.

6.5.a.3 [L1] Si f est continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment, f est nulle ★.

6.5.a.4 [L1] Théorème fondamental de l'analyse : si f est continue sur I, $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f nulle en a ★. [jury : écrit AP 2025 : preuve « le plus souvent ignorée, ou fausse, ou simplement mal rédigée »]

6.5.a.5 [L1] Convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale ; erreur en $O(1/n)$ pour f de classe $\mathcal{C}^1$ (voir 12.3) ★.

6.5.a.6 [L1] Intégration par parties pour des fonctions $\mathcal{C}^1$; changement de variable $\mathcal{C}^1$ ★.

6.5.a.7 [L3] Intégrabilité au sens de Riemann des fonctions bornées (sommes de Darboux) ; les fonctions continues sur un segment le sont grâce au théorème de Heine. [jury : leçon 203]

6.5.a.8 [L3] Lemme de Riemann-Lebesgue sur un segment ★(voir 10.3).

Savoir-faire

6.5.a.9 [L1] Calculer des primitives : décomposition en éléments simples, linéarisation, changements de variable usuels.

6.5.a.10 [L1] Calculer une limite de somme par une somme de Riemann : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \to \ln 2$.

6.5.a.11 [L1] Étudier les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$: relation de récurrence, $W_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$, application à Stirling. [jury : écrit AP 2023]

6.5.a.12 [L1] Prouver la stricte positivité d'une intégrale : l'intégrande est continue, positive et non identiquement nulle. [jury : écrit AP 2023 : l'argument attendu est « presque systématiquement le même »]

Pièges relevés par le jury

6.5.a.13 [L1] « Intégrale nulle implique fonction nulle » demande une fonction continue *de signe constant* (faux pour une fonction à valeurs complexes). [jury : écrit AP 2025]

6.5.a.14 [L1] Justifier une intégration par parties (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) et ne pas oublier les cas particuliers (par exemple $n = 0$ ou $n = m$). [jury : écrits AP 2020, 2025]

6.5.b Intégrales généralisées

Texte officiel : Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

Définitions

6.5.b.1 [L2] Intégrale généralisée convergente sur $[a, b[$ (limite de $\int_a^x$) ; fonction intégrable (intégrale absolument convergente) ; intégrale semi-convergente.

Résultats

6.5.b.2 [L2] Pour $f \geq 0$, convergence $\iff$ intégrales partielles majorées ; comparaison ; intégrales de Riemann ($\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \alpha > 1$, $\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \alpha < 1$) ★.

6.5.b.3 [L2] La convergence absolue implique la convergence.

6.5.b.4 [L2] Intégration des relations de comparaison (restes dans le cas convergent, intégrales partielles dans le cas divergent) ★.

6.5.b.5 [L2] Intégration par parties sur un intervalle quelconque (si fg a des limites finies aux bornes, les deux intégrales sont de même nature) ; changement de variable par une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement monotone ★.

6.5.b.6 [L2] $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge sans que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ soit intégrable ; sa valeur est $\pi/2$ ★. [jury : écrit AP 2020 : « l'exemple le plus commun »]

6.5.b.7 [L3] Critère d'Abel pour les intégrales (fonction décroissant vers 0 contre une fonction à primitive bornée).

6.5.b.8 [L3] Une fonction continue intégrable sur $[0, +\infty[$ ne tend pas forcément vers 0 ; elle y tend si elle est de plus uniformément continue †. [jury : écrit AP 2022 : contre-exemples qu'un candidat « se doit de connaître »]

Savoir-faire

6.5.b.9 [L2] Prouver une convergence : continuité (intégrabilité locale), puis étude séparée de chaque borne en comparant $|f|$ à des fonctions de référence. [jury : écrits AP 2020, 2021 ; écrit AP 2022 : « progrès importants »]

6.5.b.10 [L2] Intégrer par parties sur un segment $[a, x]$ puis faire tendre x vers la borne, en contrôlant le crochet. [jury : écrit AP 2022 : intégration par parties impropre faite « sans aucune précaution de convergence »]

6.5.b.11 [L2] Obtenir des équivalents : $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$, $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$. [jury : leçon 224]

6.5.b.12 [L2] Étudier la fonction Γ : définition pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$. [jury : écrits AP 2022, 2025]

Exemples et contre-exemples

6.5.b.13 [L2] $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$; $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge alors que l'intégrande ne tend pas vers 0.

6.5.b.14 [L3] Une fonction continue positive « en dents de scie » (pics de hauteur n et de largeur $1/n^3$) est intégrable sur $[0, +\infty[$ sans être bornée.

Pièges relevés par le jury

6.5.b.15 [L2] Une fonction continue sur un intervalle non fermé n'est pas forcément intégrable. [jury : écrit AP 2022]

6.5.b.16 [L2] Écrire $|\int f| \leq \int |f|$ avant d'avoir établi l'intégrabilité, ou conclure par $|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x| < +\infty$, est fautif et sanctionné : il faut d'abord établir l'intégrabilité. [jury : écrits AP 2020, 2023]

6.5.b.17 [L2] Une intégration par parties sur $]0, +\infty[$ peut créer une divergence en 0 ; sur $[1, +\infty[$, elle exige de justifier la convergence ; prudence avec les bornes. [jury : écrits AP 2020, 2025]

6.5.b.18 [L2] Une fonction bornée n'a pas forcément de limite : majorer $\int_a^x$ ne prouve pas la convergence (sauf intégrande positif). [jury : écrit AP 2020]

6.5.b.19 [L2] Connaître les critères de Riemann en 0 et en $+\infty$. [jury : écrit AP 2020 : erreurs « lourdement sanctionnées »]

6.6 Suites et séries de fonctions

Texte officiel : Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale. Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

Définitions

6.6.1 [L2] Convergence simple, convergence uniforme (norme $\|\cdot\|_\infty$), convergence uniforme sur tout segment ; convergence normale d'une série de fonctions.

Résultats

6.6.2 [L2] Une limite uniforme de fonctions continues est continue ★ ; théorème de la double limite (démonstration hors programme en MP) ★. [jury : leçon 201, rapport 2021 : la maîtrise de ce fait est attendue]

6.6.3 [L2] Convergence uniforme sur tout segment et intégration : $\int_a^x f_n \to \int_a^x f$ uniformément sur tout segment ★.

6.6.4 [L2] Si les f_n sont $\mathcal{C}^1$, convergent simplement et si (f_n') converge uniformément sur tout segment vers g, alors la limite f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$ ★. [jury : écrit AP 2022]

6.6.5 [L2] Pour les séries : normale ⇒ uniforme ⇒ simple ; normale ⇒ absolue en tout point ; uniforme ⟺ simple et restes tendant uniformément vers 0.

6.6.6 [L3] Théorèmes de Dini †.

6.6.7 [L2] Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes (démonstration non exigible en MP) ★(Bernstein ou convolution). [jury : leçons 201, 209]

6.6.8 [L3] Théorème de Weierstrass trigonométrique : toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques (Fejér) ★. [jury : leçon 209]

6.6.9 [L3] Théorème de Stone-Weierstrass †. [jury : leçon 201 : « évidemment incontournable »]

6.6.10 [L3] Il existe des fonctions continues nulle part dérivables ; ce sont des limites uniformes de polynômes †. [jury : écrit AP 2022 ; leçon 228]

Savoir-faire

6.6.11 [L2] Prouver une convergence uniforme en majorant $\sup|f_n - f|$ par une quantité indépendante de x qui tend vers 0 ; la réfuter avec une suite (x_n) bien choisie.

6.6.12 [L2] Prouver une convergence normale avec un majorant qui ne dépend pas de la variable. [jury : écrit AP 2020 : majorations « par une quantité qui dépend de la variable »]

6.6.13 [L2] Choisir l'intervalle où vérifier la convergence uniforme, et prouver la convergence normale sur l'ensemble même où on l'utilise. [jury : écrit AP 2022]

6.6.14 [L2] Étudier une fonction définie par une série : domaine, régularité, comportement asymptotique (par exemple $\zeta(x) \sim 1/(x-1)$ en 1^+). [jury : leçon 224]

Exemples et contre-exemples

6.6.15 [L2] $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$: convergence simple, non uniforme ; uniforme sur tout $[0,a]$, $a < 1$.

6.6.16 [L3] $\sum(-1)^n x^n/n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (reste de série alternée) mais pas normalement.

6.6.17 [L3] Une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes est un polynôme (les $P_n - P_N$ sont bornés, donc constants pour n, N grands). [jury : écrit AP 2023]

Pièges relevés par le jury

6.6.18 [L2] La convergence uniforme ne passe pas du local au global : la convergence uniforme sur tout $[0,a]$, $a < 1$, ne donne pas la convergence uniforme sur $[0,1[$. [jury : écrit AP 2020 : « erreur grave » ; écrit AP 2023]

6.6.19 [L2] La linéarité ne permet pas de dériver terme à terme une somme infinie ; la seule convergence uniforme de la série ne suffit pas non plus. [jury : écrit AP 2022 : seul un tiers des copies a eu tous les points]

6.6.20 [L2] Une limite uniforme de fonctions $\mathcal{C}^1$ peut ne pas être dérivable. [jury : écrit AP 2022]

6.6.21 [L2] Ne pas confondre convergence normale et absolue, ni convergence uniforme et simple. [jury : écrits AP 2020, 2023]

6.7 Convexité

Texte officiel : Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité. Inégalités de convexité.

Définitions

6.7.1 [L1] Fonction convexe, strictement convexe sur un intervalle ; épigraphe [L3] .

Résultats

6.7.2 [L1] Inégalité des pentes ; f est convexe si et seulement si les pentes $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ croissent en chaque variable ★ ; inégalité de Jensen discrète.

6.7.3 [L1] Pour f dérivable : convexe $\iff$ f' croissante $\iff$ graphe au-dessus des tangentes ; pour f deux fois dérivable : $\iff$ $f'' \geq 0$.

6.7.4 [L3] Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue, dérivable à gauche et à droite en tout point, avec $f'_g \leq f'_d$ croissantes ; elle est dérivable sauf en un ensemble au plus dénombrable de points ★. [jury : leçon 229]

6.7.5 [L1] Inégalités arithmético-géométrique, de Hölder et de Minkowski (version finie) par convexité ★.

6.7.6 [L3] Inégalité de Jensen intégrale ou probabiliste. [jury : leçon 253, rapport 2021]

6.7.7 [L3] Pour une fonction convexe, un minimum local est global ; une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$ est constante. [jury : leçon 219, rapport 2021]

6.7.8 [L3] Γ est logarithmiquement convexe (théorème de Bohr-Mollerup) †.

Savoir-faire

6.7.9 [L1] Démontrer des inégalités par convexité ou concavité : $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$, $\ln(1+x) \leq x$.

6.7.10 [L1] Illustrer par des dessins. [jury : leçon 229 : « de nombreux dessins »]

6.7.11 [L3] Déduire l'inégalité de Hölder de l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Exemples et contre-exemples

6.7.12 [L1] $|x|$ est convexe et non dérivable en 0 ; x^4 est strictement convexe avec $f''(0) = 0$.

7 Analyse à une variable complexe

Bilan des rapports du jury 2020–2025. L'analyse complexe revient souvent à l'écrit d'analyse et probabilités : théorème des résidus, prolongement méromorphe de ζ, holomorphie de séries et d'intégrales à paramètre (écrit AP 2020 : « la notion d'holomorphie demeure aussi une difficulté pour beaucoup de candidats » ; moins de la moitié des candidats a abordé le calcul par résidus, « pourtant très classique ») ; fonctions Γ et ζ, séries de Dirichlet, logarithme complexe, principe des zéros isolés (écrit AP 2022) ; factorisation de sin, transformée de Fourier holomorphe d'une fonction à support compact (écrit AP 2023) ; logarithme complexe et formule de Cauchy (écrit AP 2025, question « très rarement correctement traitée »). Les erreurs typiques portent sur les hypothèses : connexité du domaine, nature du domaine dans la formule de Cauchy, normalité de la convergence. Les séries entières sont au programme de MP ; les fonctions holomorphes n'y figurent pas (niveau L3).

7.1 Séries entières

7.1.a Rayon de convergence, propriétés de la somme

Texte officiel : Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

Définitions

7.1.a.1 [L2] Série entière $\sum a_n z^n$; rayon de convergence $R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ bornée}\}$; disque ouvert de convergence.

7.1.a.2 [L2] Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

7.1.a.3 [L3] Formule de Cauchy-Hadamard $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$.

Résultats

7.1.a.4 [L2] Lemme d'Abel ★ ; convergence absolue pour $|z| < R$, divergence grossière pour $|z| > R$.

7.1.a.5 [L2] $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$; $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$; règle de d'Alembert ; $\sum n a_n z^n$ a le même rayon.

7.1.a.6 [L2] Convergence normale sur tout disque fermé de rayon $r < R$; continuité de la somme sur le disque ouvert ★.

7.1.a.7 [L3] La somme est $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$, de dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ ★ ; elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ et $a_n = f^{(n)}(0)/n!$; primitive $\sum a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

7.1.a.8 [L3] La somme est développable en série entière en tout $z_0 \in D(0,R)$, avec un rayon au moins $R - |z_0|$ ★. [jury : leçon 243, rapport 2021 : arguments attendus]

7.1.a.9 [L2] Théorème d'Abel radial (démonstration hors programme en MP) ★ : c'est un résultat de *continuité*, pas de prolongement. [jury : leçon 243 : souvent proposé « en pensant qu'il s'agit d'un théorème de prolongement »]

7.1.a.10 [L3] Théorèmes taubériens (Tauber, Hardy-Littlewood) †. [jury : leçon 243]

7.1.a.11 [L2] Unicité des coefficients : si deux sommes coïncident sur $]0,\alpha]$, les coefficients sont égaux.

Savoir-faire

7.1.a.12 [L2] Calculer un rayon : d'Alembert (en précisant $z \neq 0$), comparaison, équivalents, Cauchy-Hadamard. [jury : écrit AP 2020 : justification « que de nombreuses copies ont omise » ; leçon 243, rapport 2021 : Cauchy-Hadamard « souvent » oubliée]

7.1.a.13 [L3] Obtenir un développement en série entière par l'holomorphie, avec en prime le rayon, voire l'ordre de grandeur des coefficients. [jury : leçon 243]

7.1.a.14 [L3] Exploiter les séries entières en combinatoire (nombres de Catalan, de Bell) et pour les fonctions génératrices de variables aléatoires. [jury : leçon 243]

Exemples et contre-exemples

7.1.a.15 [L2] Sur le cercle unité : $\sum z^n$ diverge partout, $\sum z^n/n$ converge sauf en 1, $\sum z^n/n^2$ converge normalement.

7.1.a.16 [L3] $\sum z^{2^n}$: le cercle unité est une coupure (aucun prolongement analytique) †.

Pièges relevés par le jury

7.1.a.17 [L2] Distinguer disque de convergence, domaine de convergence et domaines de convergence normale. [jury : leçon 243, rapport 2021 : « trop de candidats hésitent »]

7.1.a.18 [L2] Au bord du disque, justifier tout passage à la limite dans la somme (continuité, convergence uniforme). [jury : écrit AP 2020]

7.1.b Exponentielle complexe, développements usuels

Texte officiel : Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

Définitions

7.1.b.1 [L1] $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$; [L2] $\exp z = \sum z^n/n!$.

7.1.b.2 [L3] $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Résultats

7.1.b.3 [L2] $\exp(a+b) = \exp a \exp b$ (produit de Cauchy) ★ ; exp est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C},+)$ sur $(\mathbb{C}^*,\times)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ ★.

7.1.b.4 [L1] $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. [jury : écrit AP 2023 : égalité « souvent utile »]

7.1.b.5 [L3] cos et sin sont entières, non bornées sur $\mathbb{C}$; les zéros de sin sont les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; π peut être défini à partir de exp †.

7.1.b.6 [L2] Développements de exp, ch, sh, cos, sin, arctan, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $1/(1-z)$. [jury : leçon 243, rapport 2021 : à donner « sans consulter ses notes »]

7.1.b.7 [L3] $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}z^n/n$ sur $D(0,1)$.

Savoir-faire

7.1.b.8 [L2] Développer en série entière par opérations, dérivation, intégration, ou à l'aide d'une équation différentielle linéaire (par exemple $(1+x)y' = \alpha y$).

7.1.b.9 [L3] Résoudre $e^z = w$, $\sin z = w$ dans $\mathbb{C}$.

Pièges relevés par le jury

7.1.b.10 [L1] Il n'y a pas d'inégalité entre nombres complexes ; les majorations de modules doivent être justifiées. [jury : écrits AP 2020, 2023]

7.2 Fonctions d'une variable complexe

7.2.a Holomorphie, intégrale curviligne, logarithme

Texte officiel : Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

Définitions

7.2.a.1 [L3] Fonction holomorphe sur un ouvert U : $\mathbb{C}$-dérivable en tout point.

7.2.a.2 [L3] Chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$; longueur.

7.2.a.3 [L3] Primitive d'une fonction continue sur U ; détermination continue du logarithme ; détermination principale Log sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

Résultats

7.2.a.4 [L3] Conditions de Cauchy-Riemann : $f = P + iQ$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si elle est $\mathbb{R}$-différentiable avec $P_x = Q_y$ et $P_y = -Q_x$; la différentielle est alors une similitude directe ★. [jury : leçon 215 ; leçon 245, rapport 2021 : signification géométrique attendue]

7.2.a.5 [L3] $\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma)\sup_{\gamma^*}|f|$; invariance par reparamétrage ; $\int_\gamma F' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

7.2.a.6 [L3] Une fonction continue sur U a une primitive si et seulement si son intégrale sur tout chemin fermé est nulle ★.

7.2.a.7 [L3] Lemme de Goursat ; une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé y a une primitive ★.

7.2.a.8 [L3] Sur un ouvert connexe ne contenant pas 0, les déterminations du logarithme sont les primitives de $1/z$ qui conviennent en un point ; il en existe sur tout ouvert étoilé, aucune sur $\mathbb{C}^*$ ★.

7.2.a.9 [L3] Holomorphie sous le signe intégrale : si $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe et si $|f(z,t)| \leq g_K(t)$ intégrable pour z dans chaque compact K, alors $z \mapsto \int f(z,t)\,\mathrm{d}t$ est holomorphe ★. [jury : écrit AP 2020 : théorème « pas toujours connu » ; leçon 239]

7.2.a.10 [L3] La partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique ; réciproque sur un ouvert étoilé †. [jury : leçon 215, rapports 2022 et 2023 : les candidats y semblent « peu familiers »]

Savoir-faire

7.2.a.11 [L3] Vérifier l'holomorphie par Cauchy-Riemann ; reconnaître les fonctions non holomorphes ($\bar{z}$, $|z|^2$).

7.2.a.12 [L3] Calculer une intégrale curviligne par paramétrage ($\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi$) et savoir en expliquer le sens précis. [jury : leçon 245, rapport 2021]

7.2.a.13 [L3] Montrer l'holomorphie de Γ sur $\{\mathrm{Re}\,z > 0\}$, de transformées de Mellin ou de Laplace. [jury : écrits AP 2020, 2022]

Exemples et contre-exemples

7.2.a.14 [L3] $z \mapsto |z|^2$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable qu'en 0.

7.2.a.15 [L3] $\mathrm{Log}((-i)(-i)) = \mathrm{Log}(-1) = i\pi$ alors que $2\,\mathrm{Log}(-i) = -i\pi$.

Pièges relevés par le jury

7.2.a.16 [L3] Le logarithme complexe ne se manipule pas comme le logarithme réel, en particulier pour le logarithme d'un produit. [jury : écrit AP 2025]

7.2.a.17 [L3] L'holomorphie est une notion sur un ouvert de $\mathbb{C}$: une « holomorphie sur un intervalle de la droite réelle » n'a pas de sens. [jury : écrit AP 2022]

7.2.b Indice

Texte officiel : Indice d'un chemin fermé $\mathcal{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

Définitions

7.2.b.1 [L3] $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$ pour $a \notin \gamma^*$.

Résultats

7.2.b.2 [L3] $\mathrm{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$ ★ ; l'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ et nul sur la composante non bornée ★.

7.2.b.3 [L3] Interprétation par le relèvement de l'argument : nombre de tours de γ autour de a. [jury : leçon 102]

Savoir-faire

7.2.b.4 [L3] Calculer l'indice d'un cercle, d'un bord de demi-disque, d'un cercle parcouru plusieurs fois.

7.2.c Formules de Cauchy et conséquences

Texte officiel : Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

Résultats

7.2.c.1 [L3] Formule de Cauchy sur un ouvert convexe (ou étoilé) U : $\mathrm{Ind}_\gamma(a)f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$ pour γ fermé dans U, $a \in U \setminus \gamma^*$ ★.

7.2.c.2 [L3] Une fonction holomorphe est développable en série entière sur tout disque inclus dans U, avec $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$ ★ ; holomorphe $\iff$ analytique. [jury : leçon 243 : liens à « maîtriser » ; leçon 243, rapport 2022 : « peu de candidats ont les idées claires » ; leçon 245]

7.2.c.3 [L3] Inégalités de Cauchy ★ ; théorème de Liouville ★ ; application au théorème de d'Alembert-Gauss.

7.2.c.4 [L3] Principe des zéros isolés : sur U *connexe*, les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sont isolés, avec une multiplicité ★.

7.2.c.5 [L3] Prolongement analytique : deux fonctions holomorphes sur U *connexe* qui coïncident sur une partie ayant un point d'accumulation *dans* U sont égales ★.

7.2.c.6 [L3] Principe du maximum : sur U connexe, si $|f|$ a un maximum local, f est constante ; sur U borné, $\max_{\bar{U}} |f|$ est atteint au bord ★. [jury : leçon 245]

7.2.c.7 [L3] Propriété de la moyenne ; théorème de Morera ; théorème de l'application ouverte †.

7.2.c.8 [L3] Lemme de Schwarz et automorphismes du disque unité †. [jury : leçon 245, rapport 2021]

Savoir-faire

7.2.c.9 [L3] Étendre une identité de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ par prolongement analytique (formule fonctionnelle de Γ, transformée de Fourier d'une gaussienne). [jury : écrit AP 2023]

7.2.c.10 [L3] Exprimer les coefficients d'un développement en série entière par une intégrale et les majorer. [jury : écrit AP 2023]

Exemples et contre-exemples

7.2.c.11 [L3] $z \mapsto \sin z/z$ et $z \mapsto (e^z - 1)/z$ se prolongent en fonctions entières.

7.2.c.12 [L3] $\sin(1/z)$ a des zéros $1/(k\pi)$ qui s'accumulent en $0 \notin U = \mathbb{C}^*$ sans être identiquement nulle : le point d'accumulation doit être dans U.

Pièges relevés par le jury

7.2.c.13 [L3] Zéros isolés et unicité du prolongement exigent la connexité du domaine et un point d'accumulation dans le domaine : le rappeler même si c'est évident. [jury : écrit AP 2022 : oubli « quasi-systématique » ; écrit AP 2023]

7.2.c.14 [L3] L'argument d'unicité du prolongement analytique est souvent omis. [jury : écrit AP 2020]

7.2.c.15 [L3] Mentionner et vérifier les hypothèses de la formule de Cauchy, en particulier la nature du domaine. [jury : écrit AP 2025]

7.2.d Singularités, fonctions méromorphes, résidus

Texte officiel : Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

Définitions

7.2.d.1 [L3] Singularité isolée : effaçable, pôle d'ordre m, essentielle.

7.2.d.2 [L3] Série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ sur une couronne ; partie principale ; résidu $\mathrm{Res}(f,a) = a_{-1}$.

7.2.d.3 [L3] Fonction méromorphe sur U : holomorphe hors d'une partie P fermée et discrète de U, avec des pôles aux points de P. [jury : leçon 245 ; leçon 245, rapport 2021 : la condition sur l'ensemble des pôles]

Résultats

7.2.d.4 [L3] Développement de Laurent sur une couronne, unicité, coefficients intégraux ★.

7.2.d.5 [L3] Théorème de Riemann sur les singularités effaçables (fonction bornée au voisinage) ★ ; a est un pôle si et seulement si $|f(z)| \to +\infty$; théorème de Casorati-Weierstrass †.

7.2.d.6 [L3] Théorème des résidus : si f est holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ (U étoilé) et γ fermé dans U évite les a_k, alors $\int_\gamma f = 2i\pi \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k)$ ★. [jury : écrit AP 2020 : énoncé « souvent approximatif »]

7.2.d.7 [L3] Résidu en un pôle simple de g/h : $g(a)/h'(a)$; formule pour un pôle d'ordre m.

7.2.d.8 [L3] Les fonctions méromorphes sur un ouvert connexe forment un corps. [jury : écrit MG 2025]

7.2.d.9 [L3] Principe de l'argument, théorème de Rouché †. [jury : leçon 245]

7.2.d.10 [L3] Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, à pôles simples en $-n$, de résidus $(-1)^n/n!$; ζ se prolonge à $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ avec un pôle simple en 1 †. [jury : écrits AP 2020, 2022 ; leçon 245, rapport 2021 : prolongement de Γ « très souvent proposé mais insuffisamment maîtrisé »]

Savoir-faire

7.2.d.11 [L3] Calculer des intégrales par résidus : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ par un demi-cercle indenté. [jury : écrit AP 2020 ; leçon 236]

7.2.d.12 [L3] Justifier les passages à la limite sur les arcs de cercle (majorations explicites, convergence dominée). [jury : écrit AP 2020 : une bonne maîtrise de la convergence dominée « a été valorisée »]

7.2.d.13 [L3] Trouver tous les pôles, y compris les moins visibles, et calculer correctement les résidus. [jury : écrit AP 2020 : pôles en $1 + 2i\pi n$ oubliés, « très peu donnent un calcul convaincant du résidu »]

7.2.d.14 [L3] Écrire le développement de Laurent d'une fraction rationnelle sur différentes couronnes.

Exemples et contre-exemples

7.2.d.15 [L3] $e^{1/z}$: singularité essentielle en 0, de résidu 1.

7.2.d.16 [L3] tan, $1/\sin$, $\pi \cot(\pi z)$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Pièges relevés par le jury

7.2.d.17 [L3] L'absence de pôle *sur* le contour ne suffit pas à rendre l'intégrale nulle : ce sont les pôles intérieurs (d'indice non nul) qui comptent. [jury : écrit AP 2020]

7.2.e Suites et séries de fonctions holomorphes

Texte officiel : Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

Résultats

7.2.e.1 [L3] Théorème de Weierstrass : une limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes est holomorphe, et les dérivées convergent uniformément sur tout compact ★. [jury : écrits AP 2020, 2022]

7.2.e.2 [L3] Une série de fonctions holomorphes normalement convergente sur tout compact a une somme holomorphe, dérivable terme à terme.

7.2.e.3 [L3] $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ est holomorphe sur $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ ★ ; une série de Dirichlet est holomorphe sur un demi-plan de convergence. [jury : écrits AP 2020, 2022]

7.2.e.4 [L3] Théorèmes de Montel et de Hurwitz †. [jury : leçons 201, 245]

7.2.e.5 [L3] Produits infinis : $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\geq 1}(1 - z^2/n^2)$ †. [jury : écrit AP 2023]

Savoir-faire

7.2.e.6 [L3] Montrer l'holomorphie d'une fonction définie par une série ou une intégrale : holomorphie de chaque terme, convergence normale sur les compacts (par exemple via $\min_K \operatorname{Re} s$, atteint). [jury : écrit AP 2020 : justification appréciée]

7.2.e.7 [L3] Pour intervertir une limite et une somme, établir la convergence normale sur l'ensemble même où on l'utilise, pas seulement sur ses compacts. [jury : écrit AP 2022]

Pièges relevés par le jury

7.2.e.8 [L3] Un majorant de convergence normale ne doit pas dépendre de la variable ; justifier l'holomorphie de chaque terme ($n^{-s} = e^{-s\ln n}$). [jury : écrit AP 2020]

8 Topologie

Bilan des rapports du jury 2020–2025. La topologie sert d'ossature aux sujets d'analyse et probabilités : espace $L^2(]0,+\infty[)$ et opérateurs (écrit AP 2020) ; prolongement d'une forme linéaire continue définie sur un sous-espace dense d'un Banach, inégalité de Bessel, parties relativement compactes pour $\|\cdot\|_\infty$ (écrit AP 2021) ; sous-famille dense de $\ell^2(\mathbb{N})$ (écrit AP 2022) ; espace des fonctions continues bornées, théorèmes de Heine et d'Ascoli (écrit AP 2024) ; opérateur d'intégration de Volterra, adjoint, norme, compacité par Ascoli (écrit AP 2025, où « très peu de candidats ont pensé à invoquer le théorème d'Ascoli »). En mathématiques générales, le jury relève que l'équivalence des normes en dimension finie est « parfois mal comprise » et salue les arguments de compacité (écrit MG 2020). En MP, seuls les espaces vectoriels normés sont au programme : espaces métriques, suites de Cauchy, espaces de Banach, propriété de Borel-Lebesgue et connexité (hors connexité par arcs) y sont hors programme.

8.1 Topologie et espaces métriques

8.1.a Espaces métriques

Texte officiel : Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

Définitions

8.1.a.1 [L3] Distance, espace métrique ; boules ; ouverts, fermés, voisinages ; intérieur, adhérence, frontière ; partie dense (dans un espace normé [L2]).

8.1.a.2 [L3] Topologie induite sur une partie, ouverts et fermés relatifs (dans un espace normé [L2]).

8.1.a.3 [L3] Produit fini d'espaces métriques, distance produit.

8.1.a.4 [L2] Distance à une partie $d(x,A)$; diamètre.

Résultats

8.1.a.5 [L2] Réunion quelconque et intersection finie d'ouverts sont ouvertes ; propriétés duales des fermés.

8.1.a.6 [L2] $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne ; $\bar{A} = \{x : d(x,A) = 0\}$.

8.1.a.7 [L3] Deux distances peuvent définir la même topologie sans être équivalentes (d et $\min(d,1)$).

Savoir-faire

8.1.a.8 [L2] Montrer qu'une partie est ouverte ou fermée comme image réciproque par une application continue, ou par la caractérisation séquentielle.

Exemples et contre-exemples

8.1.a.9 [L3] Distance discrète ; distance p-adique (ultramétrique) [†].

8.1.b Suites, limites, continuité

Texte officiel : Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

Définitions

8.1.b.1 [L2] Suite convergente, valeur d'adhérence ; limite d'une application en un point adhérent ; continuité.

8.1.b.2 [L3] Homéomorphisme.

Résultats

8.1.b.3 [L2] Caractérisations séquentielles de l'adhérence, des fermés, de la continuité [★].

8.1.b.4 [L2] f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

8.1.b.5 [L2] Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

8.1.b.6 [L3] L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\bigcap_n \overline{\{u_k : k \geq n\}}$.

8.1.b.7 [L3] Une bijection continue n'est pas toujours un homéomorphisme ($t \mapsto e^{it}$ de $[0, 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$).

Exemples et contre-exemples

8.1.b.8 [L3] $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$ sont homéomorphes ; $[0, 1[$ et $\mathbb{U}$ ne le sont pas.

8.1.c Compacité, connexité

Texte officiel : Compacité. Équivalence des définitions en termes de valeurs d'adhérence (Bolzano-Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel-Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

Définitions

8.1.c.1 [L2] Partie compacte (propriété de Bolzano-Weierstrass) ; propriété de Borel-Lebesgue [L3] ; partie précompacte [L3] .

8.1.c.2 [L3] Espace connexe ; composante connexe ; [L2] partie connexe par arcs, composante connexe par arcs.

Résultats

8.1.c.3 [L3] Dans un espace métrique, Bolzano-Weierstrass $\iff$ Borel-Lebesgue $\iff$ complet et précompact ★.

8.1.c.4 [L2] Un compact est fermé borné ; un fermé d'un compact est compact ; un produit fini de compacts est compact ★.

8.1.c.5 [L2] L'image continue d'un compact est compacte ; une fonction numérique continue sur un compact non vide atteint ses bornes ★.

8.1.c.6 [L2] Une suite d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence ★.

8.1.c.7 [L3] Une bijection continue d'un compact sur un espace métrique est un homéomorphisme.

8.1.c.8 [L3] L'image continue d'un connexe est connexe ; les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ★ ; tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints ★. [jury : leçon 204 ; leçon 204, rapport 2021 : résultats « incontournables »]

8.1.c.9 [L3] Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe, réciproque fausse ; un ouvert connexe d'un espace normé est connexe par arcs ★. [jury : leçon 204, rapport 2021 : distinguer les deux notions « avec des exemples »]

8.1.c.10 [L3] Sur un connexe, une fonction localement constante est constante ★. [jury : leçon 204 : passage « du local au global »]

8.1.c.11 [L2] $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ont deux composantes (voir 2.d).

8.1.c.12 [L3] Lemme de Lebesgue ; extraction de sous-recouvrements finis pour passer du local au global. [jury : leçon 203]

Savoir-faire

8.1.c.13 [L2] Obtenir l'existence d'un extremum par compacité (distance à un fermé en dimension finie, minimisation de fonctions coercives). [jury : leçon 203 ; leçon 203, rapport 2021 : rôle qui « mériterait d'être davantage étudié »]

8.1.c.14 [L3] Passer du local au global par connexité : unicité globale en équations différentielles, prolongement analytique, fonctions de différentielle nulle. [jury : leçon 204]

8.1.c.15 [L2] Montrer une connexité par arcs avec des chemins explicites ou des générateurs (par exemple $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$). [jury : leçon 108]

8.1.c.16 [L3] Montrer une non-connexité par une surjection continue sur $\{0, 1\}$.

Exemples et contre-exemples

8.1.c.17 [L3] Ensemble triadique de Cantor : compact, parfait, totalement discontinu. [jury : leçon 204]

8.1.c.18 [L3] L'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$ est connexe mais pas connexe par arcs.

8.1.c.19 [L3] La boule unité fermée de ℓ^2 n'est pas compacte.

8.1.d Continuité uniforme

Texte officiel : Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.

Définitions

8.1.d.1 [L2] Application lipschitzienne, uniformément continue ; module de continuité [L3] .

Résultats

8.1.d.2 [L2] Lipschitzienne ⇒ uniformément continue ⇒ continue ; réciproques fausses.

8.1.d.3 [L2] Théorème de Heine : une application continue sur un compact est uniformément continue ★. [jury : leçon 203]

8.1.d.4 [L3] Applications : intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues, continuité des translations dans L^p. [jury : leçon 203]

8.1.d.5 [L3] Une application uniformément continue sur une partie dense, à valeurs dans un espace complet, se prolonge de façon unique en une application uniformément continue ★. [jury : leçon 205 : « innombrables applications »]

Savoir-faire

8.1.d.6 [L2] Prouver une continuité uniforme par les accroissements finis ou par Heine ; la réfuter avec deux suites (x_n), (y_n).

Exemples et contre-exemples

8.1.d.7 [L2] $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ est uniformément continue, non lipschitzienne ; $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est continue, non uniformément continue.

8.1.e Espaces complets, point fixe

Texte officiel : Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

Définitions

8.1.e.1 [L3] Suite de Cauchy ; espace complet ; application contractante.

Résultats

8.1.e.2 [L3] Une partie d'un espace complet est complète si et seulement si elle est fermée ; un produit fini d'espaces complets est complet.

8.1.e.3 [L3] Théorème de Picard-Banach : une contraction d'un espace complet non vide a un unique point fixe, limite de toute suite d'itérées, avec $d(x_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ ★. [jury : leçons 205, 226]

8.1.e.4 [L3] Si une itérée f^p est contractante, f a un unique point fixe ; point fixe dépendant continûment d'un paramètre.

8.1.e.5 [L3] Applications : Cauchy-Lipschitz (9.2), inversion locale (9.1.f), équations intégrales, méthode de Newton (12.2). [jury : leçons 205, 214]

8.1.e.6 [L3] Théorème de Baire †. [jury : leçons 201, 205, 208 : piste pour les candidats « solides »]

Savoir-faire

8.1.e.7 [L3] Appliquer le point fixe : choisir un fermé (une boule fermée) stable, montrer la contraction, conclure.

8.1.e.8 [L3] Justifier la complétude des espaces usuels. [jury : leçon 205, rapport 2021]

Exemples et contre-exemples

8.1.e.9 [L3] $x \mapsto x + 1/x$ sur $[1, +\infty[$ vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$ mais n'a pas de point fixe.

8.1.e.10 [L3] $\mathbb{Q}$ n'est pas complet ; $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$ non plus.

Pièges relevés par le jury

8.1.e.11 [L3] Savoir définir un espace de Banach et en donner des exemples avant d'invoquer un théorème de point fixe. [jury : leçon 226, rapport 2021]

8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

8.2.a Normes, dimension finie, espaces de Banach

Texte officiel : Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

Définitions

8.2.a.1 [L2] Norme, espace vectoriel normé ; normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$; normes $\|\cdot\|_p$ [L3] .

8.2.a.2 [L2] Normes équivalentes.

8.2.a.3 [L3] Espace de Banach ; série absolument convergente dans un espace normé.

Résultats

8.2.a.4 [L2] Deux normes équivalentes ont mêmes suites convergentes et même topologie.

8.2.a.5 [L2] En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (démonstration non exigible en MP) ★. [jury : leçon 203 : argument de compacité « qu'il faut avoir bien compris » ; leçon 208, rapport 2021 : se garder des « cercles vicieux »]

8.2.a.6 [L2] En dimension finie : compacts = fermés bornés, applications linéaires continues, complétude ; tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

8.2.a.7 [L3] Inégalités de Hölder et de Minkowski ; $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$.

8.2.a.8 [L3] Un espace normé est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente y converge ★.

8.2.a.9 [L3] Espaces de Banach usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}_b^0(X,E)$, ℓ^p, L^p, $\mathcal{L}_c(E,F)$ pour F de Banach.

Savoir-faire

8.2.a.10 [L2] Montrer que deux normes ne sont pas équivalentes avec une suite bien choisie (par exemple $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}^0([0,1])$). [jury : leçon 208 : exemples « de normes équivalentes ou non »]

8.2.a.11 [L2] Calculer les meilleures constantes d'équivalence entre $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

8.2.a.12 [L3] Prouver une complétude par les séries absolument convergentes.

Exemples et contre-exemples

8.2.a.13 [L3] Sur $\mathbb{K}[X]$, aucune norme n'est complète (Baire) † ; le sup sur $[0,1]$ et le sup des coefficients ne sont pas équivalents.

Pièges relevés par le jury

8.2.a.14 [L2] L'équivalence des normes est un énoncé qualitatif : elle ne permet pas de remplacer une norme par une autre dans une inégalité sans constante. [jury : écrit MG 2020 : l'équivalence des normes est « parfois mal comprise »]

8.2.b Applications linéaires continues

Texte officiel : Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

Définitions

8.2.b.1 [L2] $\mathcal{L}_c(E,F)$; norme subordonnée $\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\|$; normes matricielles subordonnées.

Résultats

8.2.b.2 [L2] u linéaire est continue $\iff$ continue en 0 $\iff$ bornée sur la boule unité $\iff$ $\exists C,\ \|u(x)\| \leq C\|x\|$ ★.

8.2.b.3 [L2] La norme subordonnée est une norme sous-multiplicative ; critère de continuité des applications multilinéaires.

8.2.b.4 [L3] Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé ★. [jury : leçon 208]

8.2.b.5 [L3] En dimension infinie, il existe des applications linéaires non continues (dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ muni du sup sur $[0,1]$). [jury : leçon 208, rapport 2021]

8.2.b.6 [L3] $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^t\bar{A}A)}$ ★.

8.2.b.7 [L3] Une application linéaire continue sur un sous-espace dense, à valeurs dans un Banach, se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de même norme ★. [jury : écrit AP 2021]

8.2.b.8 [L3] Théorèmes de Banach-Steinhaus et de Hahn-Banach †. [jury : leçon 208 : pour les candidats « solides »]

Savoir-faire

8.2.b.9 [L2] Calculer des normes subordonnées (opérateurs intégraux sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, opérateurs de multiplication) et décider si elles sont atteintes. [jury : leçon 208 ; leçon 208, rapport 2021 : notion qui « met en difficulté un trop grand nombre de candidats »]

8.2.b.10 [L3] Calculer la norme d'un opérateur diagonal sur un espace de Hilbert ($\sup|\lambda_n|$) avec Pythagore. [jury : écrit AP 2025]

8.2.b.11 [L2] Utiliser une norme subordonnée et un argument de compacité pour montrer $\|A\| < 1$. [jury : écrit MG 2020 : argument de compacité réussi, « marqueur de bonnes copies »]

Exemples et contre-exemples

8.2.b.12 [L3] L'opérateur de Volterra $f \mapsto \int_0^x f$ sur $L^2(0,1)$ a pour norme $2/\pi$. [jury : écrit AP 2025]

Pièges relevés par le jury

8.2.b.13 [L2] La convergence d'une suite d'endomorphismes se mesure en norme, pas seulement point par point. [jury : écrit MG 2020 : « les candidats savent-ils ce qu'est la convergence d'une suite d'endomorphismes ? »]

8.2.b.14 [L3] Ne pas confondre structure de groupe et structure d'espace vectoriel (par exemple pour un sous-groupe de $\mathrm{GL}(L^2)$). [jury : écrit AP 2020 : confusion « grave »]

8.2.c Norme de la convergence uniforme

Texte officiel : Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de Banach.

Définitions

8.2.c.1 [L2] Norme $\|f\|_\infty$ sur les fonctions bornées ; [L3] espace $\mathcal{C}_b^0(X,E)$.

Résultats

8.2.c.2 [L3] $(\mathcal{C}_b^0(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach si E en est un ★. [jury : écrit AP 2024]

8.2.c.3 [L3] Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini forment un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$; elles atteignent leur norme et sont uniformément continues ★. [jury : écrit AP 2024]

Savoir-faire

8.2.c.4 [L3] Démontrer la complétude d'un espace de fonctions : suite de Cauchy, limite simple, convergence uniforme, appartenance à l'espace.

Exemples et contre-exemples

8.2.c.5 [L3] $\mathcal{C}^1([0,1])$ n'est pas fermé dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$; il est complet pour $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

8.2.d Compacité en dimension infinie

Texte officiel : Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

Résultats

8.2.d.1 [L3] Théorème de Riesz : la boule unité fermée est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie ★. [jury : leçon 203 ; leçon 203, rapport 2021 : « le candidat doit savoir »]

8.2.d.2 [L3] Théorème d'Ascoli : pour X métrique compact, une partie de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{K}^n)$ est relativement compacte si et seulement si elle est équicontinue et ponctuellement bornée ★. [jury : écrits AP 2024, 2025 ; leçon 203, rapport 2021 : preuve qui « doit être connue »]

8.2.d.3 [L3] Applications : compacité d'opérateurs intégraux à noyau continu, théorème d'existence de Peano, théorème de Montel †. [jury : écrit AP 2025 ; leçon 203]

Savoir-faire

8.2.d.4 [L3] Prouver une équicontinuité par une majoration lipschitzienne uniforme ou par une représentation intégrale et Cauchy-Schwarz.

8.2.d.5 [L3] Montrer qu'un opérateur intégral est compact avec le théorème d'Ascoli. [jury : écrit AP 2025]

Exemples et contre-exemples

8.2.d.6 [L3] $(x \mapsto x^n)$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ est bornée, non équicontinue, sans sous-suite uniformément convergente.

8.2.d.7 [L3] Dans ℓ^2, $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq m$.

8.3 Espaces de Hilbert

8.3.a Espaces préhilbertiens

Texte officiel : Espaces préhilbertiens.

Définitions

8.3.a.1 [L1] Espace préhilbertien réel ; complexe [L3] ; espace de Hilbert [L3] .

Résultats

8.3.a.2 [L1] Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme, identités de polarisation.

8.3.a.3 [L3] Une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme †.

8.3.a.4 [L3] Inégalité de Bessel ; Pythagore pour une famille orthogonale finie. [jury : écrit AP 2021]

Exemples et contre-exemples

8.3.a.5 [L3] $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de $\int f\bar{g}$ est préhilbertien non complet ; ℓ^2 et L^2 sont des espaces de Hilbert.

8.3.b Projections

Texte officiel : Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

Résultats

8.3.b.1 [L3] Théorème de projection : si C est un convexe fermé non vide d'un Hilbert, tout x a un unique projeté $p_C(x)$, caractérisé par $\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$; p_C est 1-lipschitzienne ★. [jury : leçons 205, 213, 253]

8.3.b.2 [L3] Pour F sous-espace fermé : $H = F \oplus F^\perp$, p_F est linéaire continue ; $F^{\perp\perp} = \bar{F}$; F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$ ★. [jury : leçon 213, rapport 2021 : ces conséquences sont « nettement moins » citées que le théorème]

8.3.b.3 [L3] Sur un sous-espace de dimension finie de base orthonormée (e_i), $p_F(x) = \sum \langle x, e_i\rangle e_i$. [jury : leçon 213, rapport 2021 : formule qui « doit absolument être connue »]

Savoir-faire

8.3.b.4 [L3] Prouver une densité par la nullité de l'orthogonal. [jury : leçon 253]

8.3.b.5 [L3] Calculer une meilleure approximation dans L^2 (moindres carrés continus).

Exemples et contre-exemples

8.3.b.6 [L3] Dans ℓ^2, le sous-espace des suites finies a un orthogonal nul sans être égal à ℓ^2 : il n'est pas fermé.

8.3.c Dualité, bases hilbertiennes

Texte officiel : Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces ℓ^2 et L^2. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux.

Définitions

8.3.c.1 [L3] Famille orthonormée ; base hilbertienne (famille orthonormée totale) ; espace séparable.
8.3.c.2 [L3] $\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2(I,w)$ pour un poids w ; polynômes orthogonaux associés.
8.3.c.3 [L3] Adjoint d'un opérateur borné.

Résultats

8.3.c.4 [L3] Théorème de représentation de Riesz : toute forme linéaire continue est $x \mapsto \langle x, a\rangle$ pour un unique a ★ ; existence de l'adjoint d'un opérateur borné. [jury : écrit AP 2025]
8.3.c.5 [L3] ℓ^2 et L^2 sont complets ★.
8.3.c.6 [L3] Pour une base hilbertienne (e_n) : $x = \sum\langle x, e_n\rangle e_n$, $\|x\|^2 = \sum|\langle x, e_n\rangle|^2$ (Parseval), et $H \simeq \ell^2$ isométriquement ★. [jury : leçon 213, rapport 2021 : préciser les hypothèses et justifier la convergence]
8.3.c.7 [L3] Tout Hilbert séparable de dimension infinie admet une base hilbertienne dénombrable (Gram-Schmidt) ★.
8.3.c.8 [L3] $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ ★(densité des polynômes trigonométriques, par Fejér). [jury : leçon 209 ; leçon 213 : la théorie L^2 des séries de Fourier « n'était pas souvent maîtrisée »]
8.3.c.9 [L3] Polynômes orthogonaux : relation de récurrence à trois termes, n racines simples dans l'intervalle ★ ; ils forment une base hilbertienne de $L^2(I,w)$ si $\int_I e^{\alpha|x|}w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ pour un $\alpha > 0$ ★. [jury : leçon 144 ; leçon 213 : développement « présenté quasi systématiquement », preuve et passage à une base de $L^2(\mathbb{R})$ « pas parfaitement compris »]
8.3.c.10 [L3] Théorème de Lax-Milgram †. [jury : leçon 213, rapport 2021]

Savoir-faire

8.3.c.11 [L3] Distinguer base algébrique et base hilbertienne. [jury : leçon 213, rapport 2021 : distinction qui « met en difficulté nombre de candidats »]
8.3.c.12 [L3] Montrer qu'une famille orthonormée est une base hilbertienne : densité de l'espace engendré (Weierstrass) ou orthogonal réduit à $\{0\}$.
8.3.c.13 [L3] Manipuler $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ avec précaution (sommes symétriques ou convergence absolue). [jury : leçon 213, rapport 2021]
8.3.c.14 [L3] Utiliser Parseval pour calculer des sommes ($\zeta(2)$, $\zeta(4)$).

Exemples et contre-exemples

8.3.c.15 [L3] Polynômes de Legendre, de Hermite (fonctions de Hermite, base de $L^2(\mathbb{R})$), de Laguerre, de Tchebychev.
8.3.c.16 [L3] Une base hilbertienne de ℓ^2 n'est pas une base algébrique : ℓ^2 n'a pas de base algébrique dénombrable (Baire) †.

Pièges relevés par le jury

8.3.c.17 [L3] La théorie L^2 des séries de Fourier est rarement maîtrisée ; savoir interpréter Parseval comme une isométrie. [jury : leçons 209, 213, rapport 2022 ; leçon 246]

9 Calcul différentiel

Bilan des rapports du jury 2020–2025. À l'écrit, les équations différentielles reviennent régulièrement en début de sujet d'analyse et probabilités, et le jury y constate un manque de recul : équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, pour laquelle les hypothèses et conclusions du théorème de Cauchy linéaire « ne semblent à peu près connues que d'un quart des candidats » (écrit AP 2021, qui y voit « la marque d'un manque de recul des candidats sur la base des équations différentielles ») ; équation $-u'' + u = f$ et solution tendant vers 0 à l'infini, puis équation non linéaire associée (écrit AP 2024) ; équation d'ordre 2 avec conditions aux bords, changement de variables en dimension 2 (écrit AP 2025). Pour l'épreuve de modélisation, le jury attend que la moindre équation différentielle « déclenche des automatismes » : énoncer un théorème de Cauchy-Lipschitz adapté, écrire le système sous la forme $Y' = f(t,Y)$, discuter la globalité (option B). En MP, le calcul différentiel s'arrête à l'optimisation sous une contrainte et le théorème des fonctions implicites est hors programme ; les équations différentielles y sont uniquement linéaires.

9.1 Fonctions différentiables

9.1.a Différentielle

Texte officiel : Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

Définitions

9.1.a.1 [L2] f différentiable en a : $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$ avec L linéaire ; différentielle $\mathrm{d}f(a)$; dérivée selon un vecteur $D_v f(a)$.

Résultats

9.1.a.2 [L2] Si f est différentiable en a, elle y est continue et dérivable selon tout vecteur, avec $\mathrm{d}f(a)\cdot v = D_v f(a)$ ★.

9.1.a.3 [L2] Différentielle d'une application linéaire, bilinéaire ($\mathrm{d}B(a,b)(h,k) = B(a,k) + B(h,b)$), multilinéaire.

9.1.a.4 [L3] Différentielles à connaître : $M \mapsto M^2$ ($H \mapsto MH + HM$), $M \mapsto M^{-1}$ sur GL_n ($H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$), det ($H \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(M)H)$) ★. [jury : leçon 215, rapport 2021 : à trouver « en revenant à la définition »]

9.1.a.5 [L3] La différentielle de l'exponentielle matricielle en 0 est l'identité ; points où elle est un difféomorphisme local †. [jury : leçon 215]

Savoir-faire

9.1.a.6 [L2] Obtenir une différentielle en calculant directement un développement limité à l'ordre 1. [jury : leçon 215]

9.1.a.7 [L3] Montrer une non-différentiabilité : dérivées directionnelles non linéaires en v, ou discontinuité.

Exemples et contre-exemples

9.1.a.8 [L3] $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ (prolongée par 0) a des dérivées partielles en 0 sans y être continue ; $(x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ a des dérivées selon tout vecteur en 0 sans y être continue.

9.1.a.9 [L3] Une norme n'est pas différentiable en 0 ; la norme euclidienne l'est ailleurs, de gradient $x/\|x\|$.

Pièges relevés par le jury

9.1.a.10 [L2] Connaître le sens exact de la notation $o(\|h\|)$. [jury : leçon 215, rapport 2021 : « trop de candidats l'utilisent sans en maîtriser la signification »]

9.1.b Dérivées partielles, composition, accroissements finis

Texte officiel : Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Définitions

9.1.b.1 [L1] Dérivées partielles (fonctions de deux variables en MPSI) ; [L2] matrice jacobienne, gradient $\nabla f(a)$.

9.1.b.2 [L2] Application de classe $\mathcal{C}^1$: différentiable de différentielle continue.

Résultats

9.1.b.3 [L2] $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_i \partial_i f(a) h_i$; f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues (démonstration non exigible en MP) ★.

9.1.b.4 [L2] Règle de la chaîne : $\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$; produit des jacobiennes ★.

9.1.b.5 [L2] Le gradient indique la direction de plus grande pente ; il est orthogonal aux lignes de niveau.

9.1.b.6 [L2] Pour f de classe $\mathcal{C}^1$: $f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(a+t(b-a))\cdot(b-a)\,\mathrm{d}t$ ★ ; sur un ouvert connexe, $\mathrm{d}f = 0$ implique f constante.

9.1.b.7 [L3] Inégalité des accroissements finis : sur un convexe, $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{[a,b]} \|\mathrm{d}f\|\,\|b-a\|$ ★ ; l'égalité n'a lieu en général que pour f à valeurs réelles.

Savoir-faire

9.1.b.8 [L2] Calculer des dérivées partielles de fonctions composées, par exemple le laplacien en coordonnées polaires. [jury : leçon 215, rapport 2021]

9.1.b.9 [L2] Résoudre une équation aux dérivées partielles simple par changement de variables (équation des ondes en dimension 1, $\partial_x f = \partial_y f$).

Exemples et contre-exemples

9.1.b.10 [L3] Pour $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ sur $[0, 2\pi]$, aucun c ne vérifie $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$.

Pièges relevés par le jury

9.1.b.11 [L2] L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la différentiabilité : maîtriser le lien entre différentielle et dérivées partielles, « mais aussi ce qui les distingue ». [jury : leçon 215, rapport 2021]

9.1.c Ordre supérieur, formules de Taylor

Texte officiel : Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Matrice hessienne. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral (Taylor-Laplace).

Définitions

9.1.c.1 [L2] Classe $\mathcal{C}^k$; dérivées partielles d'ordre k ; matrice hessienne $H_f(x)$.

9.1.c.2 [L3] Différentielle seconde (hors programme de MP), forme bilinéaire symétrique $\mathrm{d}^2 f(a)$.

Résultats

9.1.c.3 [L2] Théorème de Schwarz (démonstration non exigible en MP) ★.

9.1.c.4 [L2] Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$ ★.

9.1.c.5 [L3] Taylor avec reste intégral à l'ordre k, obtenue en appliquant la formule à une variable à $t \mapsto f(a+th)$ ★ ; Taylor-Young à l'ordre k.

Savoir-faire

9.1.c.6 [L2] Se ramener à une variable avec $g(t) = f(a+th)$.

9.1.c.7 [L3] Utiliser les formules de Taylor à plusieurs variables et en analyser le reste. [jury : leçon 218]

Exemples et contre-exemples

9.1.c.8 [L3] $(x, y) \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ (prolongée par 0) : $\partial_x \partial_y f(0) \neq \partial_y \partial_x f(0)$.

9.1.d Étude locale, extremums

Texte officiel : Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Recherche des extrema locaux.

Définitions

9.1.d.1 [L1] Point critique ; extremum local, strict.

Résultats

9.1.d.2 [L1] En un point intérieur, un extremum local d'une fonction différentiable est un point critique.

9.1.d.3 [L2] Si f est $\mathcal{C}^2$ et a un minimum local en x, alors $H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$; si x est critique et $H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est un minimum local strict ; pour $n = 2$, discussion par le déterminant et la trace ★.

9.1.d.4 [L3] Cas dégénéré : $H_f(x)$ positive non définie ne permet pas de conclure.

9.1.d.5 [L3] Lemme de Morse †. [jury : leçons 214, 218]

9.1.d.6 [L2] Existence d'extremums globaux par compacité ou coercivité ; étude à l'intérieur puis au bord. [jury : leçon 219 ; leçon 219, rapport 2021 : distinguer propriétés « locales » et « globales »]

Savoir-faire

9.1.d.7 [L2] Trouver les points critiques et les classer à l'aide de la hessienne (signature, voir 4.b). [jury : leçon 171]

9.1.d.8 [L2] Déterminer les extremums globaux sur un compact.

Exemples et contre-exemples

9.1.d.9 [L2] x^2-y^2 (point col) ; x^2+y^4 et x^2-y^4 ont même hessienne en 0 mais des comportements différents.

Pièges relevés par le jury

9.1.d.10 [L2] Distinguer la recherche d'extremum sur un ouvert (condition de point critique) et sur un fermé (étude du bord). [jury : leçon 219, rapport 2021 : certains candidats « ne font malheureusement pas la différence »]

9.1.e Fonctions convexes de plusieurs variables

*Texte officiel : Fonctions convexes de plusieurs variables. Caractérisation de la convexité des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ définies sur un ouvert convexe [*sic*] $\mathbb{R}^n$.*

Définitions

9.1.e.1 [L3] Fonction convexe, strictement convexe sur une partie convexe ; fonction coercive.

Résultats

9.1.e.2 [L3] Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe : f convexe $\iff f(y) \geq f(x)+\langle \nabla f(x), y-x\rangle \iff \nabla f$ monotone ★.

9.1.e.3 [L3] Pour f de classe $\mathcal{C}^2$: f convexe $\iff H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$ pour tout x ; $H_f \in S_n^{++}$ partout implique la stricte convexité (réciproque fausse) ★. [jury : leçon 253]

9.1.e.4 [L3] Un point critique d'une fonction convexe $\mathcal{C}^1$ est un minimum global ; une fonction strictement convexe a au plus un point de minimum ; une fonction continue coercive sur $\mathbb{R}^n$ atteint son minimum ★. [jury : leçon 219, rapport 2021 ; leçon 253]

9.1.e.5 [L3] $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ a pour unique minimum $A^{-1}b$ ★. [jury : leçon 219, rapport 2021 : cas qui « ne devrait pas poser de difficultés »]

9.1.e.6 [L3] Une fonction convexe sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ est continue †. [jury : leçons 229, 253]

Savoir-faire

9.1.e.7 [L3] Montrer une convexité par la hessienne et l'exploiter pour des inégalités.

9.1.e.8 [L3] Prouver la coercivité de J par $\langle Ax, x\rangle \geq \lambda_{\min}\|x\|^2$. [jury : leçon 219, rapport 2021 : la coercivité « pose problème à de nombreux candidats »]

Exemples et contre-exemples

9.1.e.9 [L3] $x \mapsto \|x\|^4$ est strictement convexe de hessienne nulle en 0.

9.1.f Inversion locale, fonctions implicites

Texte officiel : Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

Définitions

9.1.f.1 [L3] $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme entre ouverts ; difféomorphisme local.

Résultats

9.1.f.2 [L3] Théorème d'inversion locale : si f est $\mathcal{C}^k$ et $\mathrm{d}f(a)$ inversible, f induit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme entre voisinages de a et de $f(a)$ ★(point fixe : rôle de la complétude). [jury : leçon 214 : complétude « qu'il conviendra d'évoquer » ; preuve possible en développement]

9.1.f.3 [L3] Inversion globale : f de classe $\mathcal{C}^1$, injective, à différentielle partout inversible, est un difféomorphisme sur son image, qui est ouverte ★.

9.1.f.4 [L3] Théorème des fonctions implicites : si $F(a,b)=0$ et $\partial_y F(a,b)$ est inversible, $F(x,y)=0$ équivaut localement à $y=\varphi(x)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathrm{d}\varphi = -(\partial_y F)^{-1}\partial_x F$ ★. [jury : leçon 214]

9.1.f.5 [L3] Applications : coordonnées polaires et sphériques, régularité d'une racine simple d'un polynôme en fonction des coefficients, racine carrée sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$. [jury : leçon 214]

9.1.f.6 [L3] Théorème du rang constant, submersions, immersions †. [jury : leçon 214]

Savoir-faire

9.1.f.7 [L3] Mettre en pratique le théorème des fonctions implicites en deux variables : tangente et position d'une courbe de niveau, dérivées de la fonction implicite. [jury : leçon 214 ; leçon 214, rapport 2021 : « indispensable »]

9.1.f.8 [L3] Pour un changement de variables global, vérifier injectivité, différentielle inversible et image exacte. [jury : écrit AP 2025]

Exemples et contre-exemples

9.1.f.9 [L3] $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, non injectif.

9.1.f.10 [L3] $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un difféomorphisme.

Pièges relevés par le jury

9.1.f.11 [L3] Le théorème d'inversion locale, souvent invoqué pour un changement de variables global, y est « inutile et concrètement insuffisant tel quel » ; il faut aussi vérifier que l'image est bien l'ensemble voulu. [jury : écrit AP 2025]

9.2 Équations différentielles

9.2.a Théorie de Cauchy-Lipschitz

Texte officiel : Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $I \times \Omega$ avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Grönwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème « des bouts »).

Définitions

9.2.a.1 [L3] Solution sur un intervalle ; problème de Cauchy ; fonction localement lipschitzienne en X ; solution maximale, solution globale.

Résultats

9.2.a.2 [L3] Théorème de Cauchy-Lipschitz : si f est continue et localement lipschitzienne en X, tout problème de Cauchy a une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert, et toute solution en est une restriction ★. [jury : leçon 220 ; leçon 220, rapport 2021 : preuve générale « souvent mal maîtrisée », le cas globalement lipschitzien est « déjà un développement appréciable »]

9.2.a.3 [L3] Si f est globalement lipschitzienne en X sur $I \times \mathbb{R}^n$, les solutions maximales sont définies sur I ★.

9.2.a.4 [L3] Théorème de Cauchy-Peano (existence pour f continue) †.

9.2.a.5 [L3] Lemme de Grönwall : $u(t) \leq a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s$ avec $b \geq 0$ implique $u(t) \leq a\exp\int_{t_0}^t b$ ★. [jury : leçons 220, 221]

9.2.a.6 [L3] Théorème de sortie de tout compact : si une solution maximale est définie sur $]\alpha, \beta[$ avec $\beta < \sup I$, elle sort définitivement de tout compact de Ω quand $t \to \beta$ ★. [jury : leçon 220]

9.2.a.7 [L3] Une équation d'ordre n se ramène à un système d'ordre 1. [jury : leçon 220 : « important d'avoir compris »]

Savoir-faire

9.2.a.8 [L3] Énoncer un théorème de Cauchy-Lipschitz adapté au problème (linéaire, global quand il s'applique), écrire explicitement f telle que $Y' = f(t, Y)$ en distinguant la variable X et la fonction Y. [jury : option B]

9.2.a.9 [L3] Établir la globalité et la positivité des solutions : estimations a priori, Grönwall, intégrales premières, barrières. [jury : option B]

9.2.a.10 [L3] Exploiter l'unicité : deux trajectoires ne se coupent pas ; une solution de $x' = a(t)x$ nulle en un point est nulle.

9.2.a.11 [L3] Résoudre explicitement des équations simples ($y' = y^2$, variables séparées). [jury : leçon 220, rapport 2021 : résolutions qui posent des difficultés « à de trop nombreux candidats »]

Exemples et contre-exemples

9.2.a.12 [L3] $y' = y^2$, $y(0) = 1$: $y = 1/(1-t)$, explosion en temps fini.

9.2.a.13 [L3] $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$: une infinité de solutions (hypothèse lipschitzienne en défaut).

Pièges relevés par le jury

9.2.a.14 [L3] Ne pas confondre solution maximale et solution globale. [jury : leçon 220, rapport 2021 : notions « souvent confuses »]

9.2.b Équations autonomes, stabilité

Texte officiel : Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).

Définitions

9.2.b.1 [L3] Équation autonome $X' = f(X)$; trajectoire ; portrait de phase ; point d'équilibre ; stabilité, stabilité asymptotique ; intégrale première ; fonction de Lyapunov †.

Résultats

9.2.b.2 [L3] Les translatées dans le temps d'une solution sont des solutions ; les trajectoires sont disjointes ou confondues ; une solution qui repasse par un point est périodique ★.

9.2.b.3 [L3] Pour $X' = AX$: l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0 ★.

9.2.b.4 [L3] Théorème de linéarisation : si les valeurs propres de $\mathrm{d}f(x^*)$ sont toutes de partie réelle < 0, l'équilibre x^* est asymptotiquement stable ★. [jury : leçon 220]

9.2.b.5 [L3] Une intégrale première est constante le long des trajectoires ; systèmes conservatifs, orbites périodiques (pendule, Lotka-Volterra).

9.2.b.6 [L3] Théorème de Poincaré-Bendixson †. [jury : leçon 220]

Savoir-faire

9.2.b.7 [L3] Tracer un portrait de phase avec symétries, champ de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières. [jury : leçon 220 : « faire des dessins » ; leçon 220, rapport 2021 : « trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase »]

9.2.b.8 [L3] Classer les systèmes linéaires plans (nœud, col, foyer, centre) par la trace et le déterminant.

9.2.b.9 [L3] Étudier le pendule $\theta'' + \sin\theta = 0$: intégrale première d'énergie, périodicité, petites oscillations. [jury : leçon 220, rapport 2021]

Exemples et contre-exemples

9.2.b.10 [L3] $x' = -x^3$: l'origine est asymptotiquement stable alors que le linéarisé ne permet pas de conclure.

9.2.c Équations et systèmes linéaires

Texte officiel : Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (fomule [sic] de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

Définitions

9.2.c.1 [L2] Système $X' = A(t)X + B(t)$ à coefficients continus ; système homogène associé ; wronskien (équation scalaire d'ordre 2).

9.2.c.2 [L3] Résolvante $R(t, s)$.

Résultats

9.2.c.3 [L2] Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité d'une solution définie sur tout I (démonstration non exigible en MP) ★. [jury : leçon 221 : la complétude « y joue un rôle crucial »]

9.2.c.4 [L2] Les solutions du système homogène forment un espace de dimension n, et $X \mapsto X(t_0)$ en est un isomorphisme ★. [jury : leçon 221, rapport 2021 : déterminer « rigoureusement » cette dimension]

9.2.c.5 [L2] Coefficients constants : $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ ★.

9.2.c.6 [L3] Formule de Duhamel : $X(t) = R(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)\,\mathrm{d}s$, soit $e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,\mathrm{d}s$ à coefficients constants ★.

9.2.c.7 [L1] Équation scalaire d'ordre 1 ; équation d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre polynomial, exponentiel ou trigonométrique.

9.2.c.8 [L2] Variation des constantes pour une équation scalaire d'ordre 2 ★.

9.2.c.9 [L3] Ordre n à coefficients constants : solutions $t^k e^{\lambda t}$ associées aux racines du polynôme caractéristique.

9.2.c.10 [L3] Formule de Liouville $W' = \mathrm{Tr}(A)W$ pour le wronskien ★ ; théorèmes de comparaison de Sturm †. [jury : leçon 221]

9.2.c.11 [L2] Recherche de solutions développables en série entière. [jury : leçon 221]

Savoir-faire

9.2.c.12 [L1] Résoudre une équation scalaire d'ordre 1 par un raisonnement visible, puis vérifier la solution obtenue. [jury : écrit AP 2021 : forme des solutions rarement « obtenue par un raisonnement visible »]

9.2.c.13 [L2] Appliquer la variation des constantes à $y'' + ay' + by = f$. [jury : leçon 221, rapport 2021 : « un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés »]

9.2.c.14 [L2] Calculer e^{tA} (diagonalisation, Dunford, polynôme annulateur) pour résoudre $X' = AX$; relier réduction et comportement asymptotique. [jury : leçons 155, 221]

9.2.c.15 [L2] Résoudre un problème aux limites, par exemple $-y'' = \lambda y$, $y(0) = y(1) = 0$, en discutant selon le paramètre. [jury : écrit AP 2025 : des candidats « n'ont pas vu que l'ensemble des solutions dépendait de λ »]

9.2.c.16 [L3] Trouver la solution de $-u'' + u = f$ qui tend vers 0 à l'infini, par convolution avec $\frac{1}{2}e^{-|x|}$. [jury : écrit AP 2024]

Pièges relevés par le jury

9.2.c.17 [L2] Pour une équation linéaire, citer le théorème de Cauchy linéaire (énoncé complet) plutôt qu'un Cauchy-Lipschitz non linéaire mal adapté. [jury : écrit AP 2021 : hypothèses et conclusions connues « d'un quart des candidats »]

9.2.c.18 [L1] Invoquer Cauchy-Lipschitz ou un théorème de point fixe là où un argument d'algèbre linéaire suffit est maladroit. [jury : écrit MG 2020 : « on a même vu le théorème de Cauchy-Lipschitz ici »]

9.3 Géométrie différentielle

9.3.a Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Texte officiel : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de $\mathbb{R}^3$, position par rapport au plan tangent.

Définitions

9.3.a.1 [L3] Sous-variété de dimension d : localement un graphe, ou l'image d'une paramétrisation (immersion homéomorphe sur son image), ou le lieu des zéros d'une submersion.

9.3.a.2 [L2] Vecteur tangent à une partie (vitesse d'un arc tracé sur la partie) ; [L3] espace tangent T_xM.

Résultats

9.3.a.3 [L3] Équivalence des définitions (inversion locale, fonctions implicites) ★.

9.3.a.4 [L2] Si $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, l'ensemble des vecteurs tangents à $\{g = 0\}$ en x est $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}g(x) = \nabla g(x)^\perp$ (démonstration hors programme en MP) ★ ; [L3] $T_xM = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}g(x) = \mathrm{Im}\,\mathrm{d}\varphi(u)$, de dimension d.

9.3.a.5 [L3] Surface $z = f(x, y)$: plan tangent, position par rapport au plan tangent selon la signature de la hessienne ★. [jury : leçon 218]

9.3.a.6 [L3] $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés ; $T_{I_n}\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices antisymétriques ★. [jury : leçon 214]

Savoir-faire

9.3.a.7 [L3] Montrer qu'une partie est une sous-variété par une submersion (sphère, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$) et calculer son espace tangent.

Exemples et contre-exemples

9.3.a.8 [L3] Le cône $x^2+y^2=z^2$ n'est pas une sous-variété au voisinage de 0 ; une courbe en huit est l'image d'une immersion injective sans être une sous-variété.

9.3.b Courbes paramétrées

Texte officiel : Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Étude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc $\mathcal{C}^1$.

Définitions

9.3.b.1 [L3] Arc paramétré $\mathcal{C}^k$; point régulier, point singulier ; tangente ; branches infinies ; abscisse curviligne ; longueur ; courbure †.

Résultats

9.3.b.2 [L3] Étude locale avec les premiers indices $p<q$ tels que $\gamma^{(p)}(t_0)$, $\gamma^{(q)}(t_0)$ soient indépendants : point ordinaire, d'inflexion, de rebroussement de première ou de seconde espèce ★.

9.3.b.3 [L3] $L(\gamma)=\int\|\gamma'\|$, invariante par reparamétrage $\mathcal{C}^1$; paramétrage normal d'un arc régulier ★.

Savoir-faire

9.3.b.4 [L3] Construire une courbe : domaine, symétries, variations, points singuliers, asymptotes ; produire des tracés soignés. [jury : écrit AP 2022 : graphes « très brouillons », ce qui est « étonnant de la part de candidats à un concours d'enseignement »]

9.3.b.5 [L3] Calculer des longueurs (arche de cycloïde, cardioïde).

Exemples et contre-exemples

9.3.b.6 [L3] Astroïde (quatre points de rebroussement), cardioïde, lemniscate de Bernoulli ; une arche de cycloïde de paramètre 1 a pour longueur 8.

9.3.c Extremums liés

Texte officiel : Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

Résultats

9.3.c.1 [L2] Une contrainte : si f et g sont $\mathcal{C}^1$, $\mathrm{d}g(x)\neq 0$ et $f_{|\{g=0\}}$ a un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$ ★.

9.3.c.2 [L3] Plusieurs contraintes : si $g=(g_1,\dots,g_p)$ est une submersion en x, alors $\mathrm{d}f(x)=\sum_i\lambda_i\mathrm{d}g_i(x)$ ★(espace tangent $\bigcap_i\operatorname{Ker}\mathrm{d}g_i(x)$ et dualité).

9.3.c.3 [L3] Conditions du second ordre sur l'espace tangent (hessienne du lagrangien) †.

Savoir-faire

9.3.c.4 [L3] Démontrer des inégalités par optimisation sous contraintes (Hölder, Hadamard, Carleman), si possible autres que l'inégalité arithmético-géométrique ; retrouver le théorème spectral en maximisant $\langle Ax,x\rangle$ sur la sphère. [jury : leçons 214, 219]

9.3.c.5 [L3] Présenter la preuve à l'aide de l'espace tangent plutôt que par des raisonnements matriciels. [jury : leçons 214, 219 ; leçon 214, rapport 2021 : la preuve « sous-matricielle » est « souvent obscure »]

9.3.c.6 [L3] Préciser des hypothèses assurant existence (compacité), unicité et caractérisation de l'extremum. [jury : option B]

Exemples et contre-exemples

9.3.c.7 [L3] Maximum de xyz sous $x+y+z=1$, $x,y,z\geq 0$; distance d'un point à une surface.

10 Calcul intégral

Bilan des rapports du jury 2020–2025. Intégration et analyse de Fourier fournissent le cœur de plusieurs sujets d'analyse et probabilités : transformée de Mellin, espace $L^2(]0,+\infty[)$, séries de Fourier (écrit AP 2020, où les hypothèses du théorème de Dirichlet « ne sont que trop rarement connues ») ; transformées de Mellin et de Fourier, intégrales à paramètre (écrit AP 2022) ; convergence dominée,

transformée de Fourier d'une fonction à support compact, théorème de Paley-Wiener (écrit AP 2023) ; convolution par $e^{-|x|}$, lemme de Riemann-Lebesgue (écrit AP 2024) ; fonctions Γ et Bêta, continuité sous l'intégrale, changement de variables en dimension 2, opérateurs sur $L^2(0,1)$ (écrit AP 2025). Le jury rappelle qu'il faut établir l'intégrabilité avant toute majoration et énumérer les hypothèses des théorèmes d'interversion. La théorie de la mesure, les espaces L^p, les intégrales multiples et l'analyse de Fourier sont absents des programmes de CPGE de 2021 (les séries de Fourier ont quitté le programme de MP) : seules les intégrales à paramètre et la convergence dominée pour les fonctions continues par morceaux y figurent.

10.1 Notions de théorie de la mesure

Texte officiel : Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Définition des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

Définitions

10.1.1 [L3] Tribu (en probabilités [L2]), espace mesurable ; tribu engendrée ; tribu borélienne ; tribu produit.

10.1.2 [L3] Mesure positive (σ-additivité) ; mesure de comptage, mesure de Dirac ; mesure de Lebesgue (construction admise) ; mesure de probabilité ; mesure produit (construction admise), $\lambda_d = \lambda^{\otimes d}$.

10.1.3 [L3] Fonction mesurable ; fonction étagée ; ensemble négligeable, propriété vraie presque partout.

Résultats

10.1.4 [L2] Continuité croissante et décroissante d'une mesure (décroissante sous une hypothèse de finitude) ★.

10.1.5 [L3] La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les $]-\infty, a]$; celle de $\mathbb{R}^d$ est la tribu produit.

10.1.6 [L3] Deux mesures finies qui coïncident sur une classe stable par intersection finie engendrant la tribu sont égales (lemme de classe monotone) †.

10.1.7 [L3] Les fonctions mesurables sont stables par opérations algébriques, sup, inf, lim sup, limite simple ; les fonctions continues sont boréliennes.

10.1.8 [L3] Toute fonction mesurable positive est limite croissante de fonctions étagées positives (uniforme si elle est bornée) ★.

10.1.9 [L3] La mesure de Lebesgue est invariante par translation et $\lambda_d(u(A)) = |\det u|\lambda_d(A)$ pour u linéaire †.

10.1.10 [L3] Il existe des parties non mesurables de $\mathbb{R}$ (Vitali) †.

Savoir-faire

10.1.11 [L3] Manipuler la notion de « presque partout » et les ensembles négligeables ; les questions fines de théorie de la mesure ne sont pas exigées. [jury : leçon 234, rapport 2021]

10.1.12 [L3] Calculer la mesure d'une limite d'ensembles par continuité monotone.

Exemples et contre-exemples

10.1.13 [L3] $\mathbb{Q}$ est négligeable et dense ; l'ensemble de Cantor est négligeable et non dénombrable.

10.2 Intégration

10.2.a Théorèmes de convergence

Texte officiel : Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.

Définitions

10.2.a.1 [L3] Intégrale d'une fonction mesurable positive (borne supérieure des intégrales de fonctions étagées) ; fonction intégrable ; $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Résultats

10.2.a.2 [L3] Théorème de convergence monotone ★ ; intégration terme à terme d'une série de fonctions positives.

10.2.a.3 [L3] Lemme de Fatou ★.

10.2.a.4 [L3] Théorème de convergence dominée ★ ; intégration terme à terme si $\sum \int |f_n| < +\infty$. [jury : leçon 234 : « incontournables » ; leçon 235, rapport 2021 : « attendus »]

10.2.a.5 [L2] Version du programme de MP pour les fonctions continues par morceaux (démonstration hors programme en MP).

10.2.a.6 [L3] Si $f \geq 0$ et $\int f = 0$, alors $f = 0$ presque partout ; une fonction intégrable est finie presque partout.

10.2.a.7 [L3] L'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue sur un segment est son intégrale usuelle ; une intégrale impropre semi-convergente n'est pas une intégrale de Lebesgue ; une série absolument convergente est une intégrale pour la mesure de comptage. [jury : leçon 234, rapport 2021 : « il faut avoir compris »]

Savoir-faire

10.2.a.8 [L3] Appliquer la convergence dominée : convergence presque partout, domination par une fonction intégrable indépendante de n ; pour un paramètre réel, passer par les suites. [jury : écrit AP 2023 : hypothèses à énumérer « clairement » et à vérifier]

10.2.a.9 [L3] Intégrer terme à terme, au besoin par convergence dominée sur les sommes partielles quand $\sum \int |f_n| = +\infty$.

10.2.a.10 [L3] Calculer par exemple $\lim_n \int_0^n (1 - x/n)^n x^{s-1} \, \mathrm{d}x = \Gamma(s)$. [jury : leçon 235]

Exemples et contre-exemples

10.2.a.11 [L3] $f_n = n\mathbf{1}_{]0,1/n]}$ tend vers 0 partout avec $\int f_n = 1$: pas de domination, inégalité stricte dans Fatou ; $\mathbf{1}_{[n,n+1]}$: la masse s'échappe à l'infini.

10.2.a.12 [L3] $x \mapsto \sin x/x$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$.

Pièges relevés par le jury

10.2.a.13 [L3] Énumérer et vérifier les hypothèses de tout théorème d'interversion ; des contre-exemples montrent que des hypothèses plus faibles ne suffisent pas. [jury : écrit AP 2023 ; leçon 235, rapport 2021 : ces points « posent problème à de nombreux candidats »]

10.2.a.14 [L3] N'écrire $|\int f| \leq \int |f|$ qu'après avoir établi l'intégrabilité. [jury : écrits AP 2020, 2023]

10.2.b Intégrales à paramètre

Texte officiel : Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabilité des intégrales à paramètres.

Définitions

10.2.b.1 [L3] Fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ (coordonnée par coordonnée).

10.2.b.2 [L2] Fonction $F(x) = \int f(x,t) \, \mathrm{d}t$.

Résultats

10.2.b.3 [L2] Continuité : $f(\cdot, t)$ continue, $|f(x,t)| \leq g(t)$ intégrable pour x dans tout segment (ou compact) $\Rightarrow F$ continue ★.

10.2.b.4 [L2] Dérivation : si $\partial_x f$ existe et est dominée localement, F est $\mathcal{C}^1$ et $F' = \int \partial_x f$ ★ ; version $\mathcal{C}^k$.

10.2.b.5 [L3] Holomorphie sous l'intégrale (voir 7.2.a). [jury : leçon 239]

10.2.b.6 [L3] Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et logarithmiquement convexe ; $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. [jury : écrits AP 2022, 2025]

10.2.b.7 [L3] Méthode de Laplace ; formule de Stirling par Γ †. [jury : leçons 224, 239]

Savoir-faire

10.2.b.8 [L2] Dominer localement (sur les segments $[a,b] \subset]0, +\infty[$) quand une domination globale est impossible. [jury : écrit AP 2025 : la domination « a posé des difficultés »]

10.2.b.9 [L2] Calculer une intégrale en dérivant par rapport à un paramètre : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ par $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. [jury : leçons 236, 239 ; leçon 239, rapport 2021]

10.2.b.10 [L3] Étudier le comportement asymptotique d'une fonction définie par une intégrale. [jury : leçon 239]

Pièges relevés par le jury

10.2.b.11 [L3] La fonction dominante ne doit pas dépendre du paramètre sur l'ensemble considéré. [jury : écrit AP 2025]

10.2.c Espaces L^p

Texte officiel : Espaces L^p, où $1 \leq p \leq \infty$. Complétude. Inégalité de Hölder.

Définitions

10.2.c.1 [L3] $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p < \infty$, $L^\infty(\mu)$ (borne supérieure essentielle), classes modulo l'égalité presque partout ; exposants conjugués.

Résultats

10.2.c.2 [L3] Inégalité de Hölder ★ ; inégalité de Minkowski ; $\|\cdot\|_p$ est une norme sur L^p.

10.2.c.3 [L3] Théorème de Riesz-Fischer : L^p est complet, et de toute suite convergente dans L^p on extrait une sous-suite convergeant presque partout ★.

10.2.c.4 [L3] Pour μ finie, $L^q \subset L^p$ si $p \leq q$; pour la mesure de comptage, $\ell^p \subset \ell^q$.

10.2.c.5 [L3] Densité des fonctions étagées, et de $\mathcal{C}_c^0$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p < \infty$; continuité des translations dans L^p, $p < \infty$ (faux pour $p = \infty$). [jury : leçons 203, 209]

10.2.c.6 [L3] Dual de L^p pour $1 \leq p < \infty$ †. [jury : leçon 234 : pour les candidats « solides »]

Savoir-faire

10.2.c.7 [L3] Utiliser Hölder pour établir une intégrabilité ou une inégalité d'interpolation $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$.

Exemples et contre-exemples

10.2.c.8 [L3] $x^{-1/2} \in L^1(]0,1[) \setminus L^2$; $x^{-1} \in L^2([1,+\infty[) \setminus L^1$.

10.2.d Fubini, changement de variables

Texte officiel : Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.

Résultats

10.2.d.1 [L3] Fubini-Tonelli pour les fonctions mesurables positives ; Fubini pour les fonctions intégrables (intégrabilité vérifiée par Tonelli sur $|f|$). [jury : leçon 235, rapport 2021 : « attendus »]

10.2.d.2 [L3] Changement de variables : pour $\varphi : U \to V$ difféomorphisme $\mathcal{C}^1$, $\int_V f = \int_U f \circ \varphi\,|\det J_\varphi|$. [jury : leçon 236 ; écrit AP 2025]

10.2.d.3 [L3] Coordonnées polaires ($r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$) et sphériques ($r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$).

10.2.d.4 [L3] $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ par les coordonnées polaires ★ ; volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$: $\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$. [jury : leçon 236, rapport 2021 : calculs qui « ne devraient pas poser de problèmes insurmontables »]

10.2.d.5 [L3] Formule de Green-Riemann †. [jury : leçon 236, rapport 2022]

Savoir-faire

10.2.d.6 [L3] Calculer des intégrales multiples par Fubini et changement de variables, en détaillant le changement de variables (difféomorphisme, image, jacobien). [jury : écrit AP 2025 : étape « trop peu souvent explicitée » ; leçon 236 : exemples « attendus »]

10.2.d.7 [L3] Établir $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$ par Fubini et changement de variables. [jury : écrit AP 2025]

Exemples et contre-exemples

10.2.d.8 [L3] $\iint_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy} = \zeta(2)$.

10.2.d.9 [L3] Pour $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sur $]0,1]^2$, les deux intégrales itérées diffèrent ($\pm\pi/4$) : f n'est pas intégrable.

10.2.e Convolution

Texte officiel : Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

Définitions

10.2.e.1 [L3] $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$; approximation de l'unité, noyau régularisant.

Résultats

10.2.e.2 [L3] $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$; $L^1 * L^p \subset L^p$; pour p, q conjugués, $L^p * L^q$ est formé de fonctions uniformément continues bornées ★.

10.2.e.3 [L3] Commutativité, associativité ; si g est $\mathcal{C}^k$ à dérivées bornées et $f \in L^1$, alors $f*g$ est $\mathcal{C}^k$ et $(f*g)^{(k)} = f * g^{(k)}$ ★.

10.2.e.4 [L3] Approximation de l'unité : $f * \rho_\varepsilon \to f$ dans L^p ($p < \infty$), uniformément si f est uniformément continue bornée ★ ; densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p. [jury : leçons 209, 234]

10.2.e.5 [L3] L^1 n'a pas d'élément neutre pour la convolution †.

Savoir-faire

10.2.e.6 [L3] Régulariser une fonction ou une indicatrice ; démontrer Weierstrass par des noyaux polynomiaux. [jury : leçon 209]

10.2.e.7 [L3] Résoudre l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ par convolution avec un noyau gaussien. [jury : leçons 209, 250]

10.2.e.8 [L3] Éviter le cercle vicieux entre continuité des translations et approximation par convolution. [jury : leçon 234, rapport 2021]

Exemples et contre-exemples

10.2.e.9 [L3] $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$ est la fonction triangle ; les gaussiennes g_t de variance t vérifient $g_s * g_t = g_{s+t}$.

10.3 Analyse de Fourier

10.3.a Séries de Fourier

Texte officiel : Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejér et de Parseval.

Définitions

10.3.a.1 [L3] Coefficients $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$; sommes partielles $S_N f$; moyennes de Cesàro $\sigma_N f$; noyaux de Dirichlet D_N et de Fejér K_N ; convolution sur $\mathbb{T}$.

Résultats

10.3.a.2 [L3] Lemme de Riemann-Lebesgue : $c_n(f) \to 0$ ★.

10.3.a.3 [L3] $c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$; $S_N f = D_N * f$, $\sigma_N f = K_N * f$; $K_N \geq 0$, $\int K_N = 1$, concentration en 0.

10.3.a.4 [L3] Théorème de Fejér : $\sigma_N f \to f$ uniformément si f est continue, dans L^p si $f \in L^p$ ($p < \infty$) ★ ; injectivité de $f \mapsto (c_n(f))_n$. [jury : leçon 246 : propriétés des noyaux « clairement explicitées » ; leçon 209]

10.3.a.5 [L3] Parseval : $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum |c_n(f)|^2$ et $\langle f,g\rangle = \sum c_n(f)\overline{c_n(g)}$; isométrie de $L^2(\mathbb{T})$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ ★. [jury : leçon 246 : interprétation « en termes d'isométrie » ; leçon 246, rapports 2021 et 2022]

10.3.a.6 [L3] Théorème de Dirichlet : si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $S_N f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ ★. [jury : écrit AP 2020 : hypothèses « que trop rarement connues »]

10.3.a.7 [L3] Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\sum |c_n(f)| < +\infty$ et la série de Fourier converge normalement vers f, sans recours au théorème de Dirichlet ★. [jury : leçon 246, rapport 2021]

10.3.a.8 [L3] Régularité et décroissance : si f est $\mathcal{C}^k$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ et $c_n(f) = o(n^{-k})$ ★. [jury : leçon 246 ; option B : lien qui « doit être connu »]

10.3.a.9 [L3] Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un point †. [jury : leçon 246]

Savoir-faire

10.3.a.10 [L3] Calculer des coefficients de Fourier (intégration par parties, cas $n = 0$ à part, $e^{2i\pi n} = 1$). [jury : écrits AP 2020, 2025]

10.3.a.11 [L3] Calculer des sommes de séries par Dirichlet ou Parseval ($\zeta(2)$, $\zeta(4)$). [jury : leçon 246]

10.3.a.12 [L3] Appliquer à l'équation de la chaleur sur le cercle, au problème de Dirichlet dans le disque, aux inégalités de Wirtinger et de Bernstein. [jury : leçon 246]

Exemples et contre-exemples

10.3.a.13 [L3] Fonction créneau (phénomène de Gibbs †) ; fonction en dents de scie et $\frac{\pi}{4} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Pièges relevés par le jury

10.3.a.14 [L3] Continuité par morceaux et périodicité ne suffisent pas à la convergence simple de la série de Fourier vers la fonction. [jury : écrit AP 2020]

10.3.a.15 [L3] Distinguer, pour chaque théorème, les hypothèses et le mode de convergence (simple, uniforme, au sens de Cesàro, L^p). [jury : leçon 246 ; option B : des candidats ont « du mal à préciser les hypothèses de régularité »]

10.3.a.16 [L3] Une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux n'est pas forcément continue ; manipuler $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ avec précaution. [jury : leçon 246, rapport 2021]

10.3.b Transformation de Fourier

Texte officiel : Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cas de l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Théorème de Plancherel. Lien avec la convolution. Règles de calculs. Formule d'inversion. Cas de la fonction gaussienne.

Définitions

10.3.b.1 [L3] $\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$; espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Résultats

10.3.b.2 [L3] $\hat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$ et tend vers 0 à l'infini (Riemann-Lebesgue) ★. [jury : leçon 250, rapport 2021 : « savoir démontrer »]

10.3.b.3 [L3] $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ ★ ; échange dérivation et multiplication par x ; translation et modulation ; dilatation.

10.3.b.4 [L3] Transformée de la gaussienne : $\widehat{e^{-|x|^2/2}} = (2\pi)^{d/2}e^{-|\xi|^2/2}$ ★(équation différentielle ou prolongement analytique). [jury : leçon 250, rapport 2021 : exemples « nécessaires » ; leçon 236]

10.3.b.5 [L3] $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, avec formule d'inversion ★.

10.3.b.6 [L3] Inversion dans L^1 : si f et $\hat{f}$ sont intégrables, $f(x) = (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$ presque partout ★ ; injectivité sur L^1. [jury : leçon 250, rapport 2021 : formule « attendue »]

10.3.b.7 [L3] Théorème de Plancherel : $\mathcal{F}$ se prolonge de $L^1 \cap L^2$ en une bijection de L^2, isométrique à la constante $(2\pi)^{d/2}$ près ★. [jury : leçon 250]

10.3.b.8 [L3] Régularité et décroissance : $x^k f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ de classe $\mathcal{C}^k$; f de classe $\mathcal{C}^k$ à dérivées intégrables $\Rightarrow \hat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$. [jury : leçon 250, rapport 2021 : lien qui « doit être fait »]

10.3.b.9 [L3] Formule sommatoire de Poisson ; théorème d'échantillonnage de Shannon ; théorème de Paley-Wiener †. [jury : leçons 246, 250 ; écrit AP 2023]

10.3.b.10 [L3] Fonctions caractéristiques des variables aléatoires (voir 11.2.b). [jury : leçon 250]

Savoir-faire

10.3.b.11 [L3] Calculer les transformées de $\mathbf{1}_{[-a,a]}$, $e^{-|x|}$, $\frac{1}{1+x^2}$ (résidus ou inversion), de la gaussienne. [jury : leçon 250, rapport 2021]

10.3.b.12 [L3] Résoudre l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ par transformation de Fourier. [jury : leçon 250]

10.3.b.13 [L3] Justifier chaque manipulation (intégrabilité, Fubini) : c'est une leçon « d'analyse » qui demande une « étude soigneuse des hypothèses ». [jury : leçon 250, rapport 2021]

10.3.b.14 [L3] Pour une transformée de Fourier en variable complexe, établir les formules par intégration par parties, ou en variable réelle puis par prolongement analytique. [jury : écrit AP 2023]

Exemples et contre-exemples

10.3.b.15 [L3] $\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi}$ n'est pas intégrable : l'inversion L^1 ne s'applique pas, l'inversion L^2 si.

Pièges relevés par le jury

10.3.b.16 [L3] Maîtriser la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1 (existence presque partout, Fubini). [jury : leçon 250, rapport 2021]

11 Probabilités et statistiques

Bilan des rapports du jury 2020–2025. Les probabilités sont rares dans les écrits 2020–2025 : seule la partie IV de l'écrit AP 2022 (produit eulérien de ζ démontré par voie probabiliste) les mobilise, et le jury note que la σ-additivité n'a « pas toujours été invoquée » et que des candidats « traduisent mal la définition de l'indépendance ». Les attendus détaillés viennent des leçons 261, 262, 264, 266 et des recommandations de l'option A : hypothèses exactes de la loi des grands nombres et du théorème central limite, liens entre modes de convergence, intervalles de confiance, vocabulaire des estimateurs. En CPGE, seules les variables aléatoires finies (MPSI) puis discrètes (MP) sont au programme ; variables à densité, modes de convergence et statistique inférentielle sont hors programme de MP (niveau L3). La statistique descriptive relève du lycée.

11.1 Espace probabilisé

Texte officiel : Événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1 de Kolmogorov, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

Définitions

11.1.1 [L2] Tribu, probabilité (σ-additivité), espace probabilisé ; événement négligeable, presque sûr ; système complet (quasi-complet) d'événements.

11.1.2 [L1] Probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A \mid B)$.

11.1.3 [L2] Indépendance de deux événements, d'une famille d'événements ; [L3] indépendance de tribus ; tribu asymptotique.

Résultats

11.1.4 [L2] Continuité croissante et décroissante ; sous-additivité dénombrable.

11.1.5 [L1] Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes ; versions dénombrables [L2] .

11.1.6 [L2] L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle ; si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ aussi.

11.1.7 [L2] Lemme des coalitions (démonstration hors programme en MP) ; existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois données (admise).

11.1.8 [L3] Lemmes de Borel-Cantelli : $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$; si les A_n sont indépendants et $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ ★. [jury : leçon 266]

11.1.9 [L3] Loi du 0-1 de Kolmogorov ★. [jury : leçon 266 : pour les candidats « solides »]

Savoir-faire

11.1.10 [L2] Invoquer la σ-additivité quand on découpe un événement en une réunion dénombrable disjointe, et écrire correctement la définition de l'indépendance. [jury : écrit AP 2022]

11.1.11 [L3] Obtenir une convergence presque sûre par Borel-Cantelli (records, suites de piles consécutifs). [jury : leçon 266]

Exemples et contre-exemples

11.1.12 [L2] Deux lancers de pièces : « pile au premier », « pile au second », « résultats égaux » sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement.

11.1.13 [L3] Le « singe tapant à la machine » écrit presque sûrement tout texte donné. [jury : leçon 266, rapport 2021]

11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

11.2.a Lois, espérance, moments

Texte officiel : Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives ou complexes, théorème de transfert, moments. Variance d'une variable aléatoire réelle. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

Définitions

11.2.a.1 [L1] Variable aléatoire finie ; [L2] variable aléatoire discrète, loi $\mathbb{P}_X$; [L3] variable aléatoire réelle quelconque, loi image.

11.2.a.2 [L3] Fonction de répartition ; densité, loi absolument continue.

11.2.a.3 [L2] Loi conjointe, lois marginales ; indépendance de variables aléatoires.

11.2.a.4 [L2] Espérance (discrète, par sommabilité) ; [L3] espérance générale (intégrale par rapport à $\mathbb{P}$) ; moments ; variance, écart type, covariance.

11.2.a.5 [L1] Lois de Bernoulli, binomiale, uniforme sur un ensemble fini ; [L2] géométrique, de Poisson ; [L3] uniforme sur un intervalle, exponentielle, de Gauss.

Résultats

11.2.a.6 [L3] La fonction de répartition caractérise la loi ; les lois sur $\mathbb{R}$ sont en bijection avec les fonctions croissantes, continues à droite, de limites 0 et 1 ; les sauts sont les atomes ; si F est $\mathcal{C}^1$, F' est une densité. [jury : leçon 261, rapport 2021]

11.2.a.7 [L2] Théorème de transfert (cas discret) ★ ; cas général [L3] .

11.2.a.8 [L2] X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple est le produit des lois ; alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\,X + \mathrm{Var}\,Y$. [jury : ancienne leçon « Espérance, variance et moments », rapport 2021 : la variance d'une somme « suscite souvent des hésitations »]

11.2.a.9 [L2] Inégalité de Cauchy-Schwarz, $L^2 \subset L^1$; [L3] inégalité de Jensen, décroissance des espaces L^p de variables aléatoires.

11.2.a.10 [L3] La densité de la somme de deux variables indépendantes à densité est la convolée des densités.

11.2.a.11 [L2] Espérance et variance des lois usuelles ; approximation de la binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ ★. [jury : leçon 264, rapport 2021 : lien « doit être discuté »]

11.2.a.12 [L3] Absence de mémoire : la loi géométrique parmi les lois sur $\mathbb{N}^*$, la loi exponentielle parmi les lois à densité sur $\mathbb{R}_+$ ★.

11.2.a.13 [L3] Stabilités : somme de Poisson indépendantes, de gaussiennes indépendantes ; minimum d'exponentielles indépendantes. [jury : leçons 261, 266]

Savoir-faire

11.2.a.14 [L3] Calculer la loi de $\varphi(X)$ (fonction test et changement de variable), de max, min, de sommes ; simuler par inversion de la fonction de répartition. [jury : leçon 261]

11.2.a.15 [L2] Retrouver rapidement espérance et variance des lois usuelles. [jury : ancienne leçon « Espérance, variance et moments », rapport 2021]

11.2.a.16 [L3] Tracer la fonction de répartition de lois simples. [jury : leçon 261, rapport 2021]

11.2.a.17 [L3] Justifier un choix de modèle : loi géométrique pour un premier succès, exponentielle pour l'absence de mémoire, normale pour une accumulation de petites erreurs indépendantes, Poisson pour des événements rares. [jury : option A]

Exemples et contre-exemples

11.2.a.18 [L3] La loi de Cauchy n'a pas d'espérance ; une loi mélange d'une masse de Dirac et d'une densité n'est ni discrète ni absolument continue.

Pièges relevés par le jury

11.2.a.19 [L3] Distinguer la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω et la loi $\mathbb{P}_X$ sur l'ensemble des valeurs. [jury : leçon 261, rapport 2021]

11.2.a.20 [L2] Ne pas confondre variance et écart type. [jury : option A]

11.2.b Fonctions génératrices et caractéristiques

Texte officiel : Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

Définitions

11.2.b.1 [L2] Fonction génératrice $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$; [L3] fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Résultats

11.2.b.2 [L2] G_X caractérise la loi ; son rayon est au moins 1 ; X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 (réciproque non exigible en MP), et $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$; variance par $G''_X(1)$.

11.2.b.3 [L2] $G_{X+Y} = G_X G_Y$ pour X, Y indépendantes★.

11.2.b.4 [L3] φ_X est uniformément continue, $|\varphi_X| \leq 1$, $\varphi_X(0) = 1$; elle caractérise la loi★ ; si $\mathbb{E}|X|^k < +\infty$, φ_X est $\mathcal{C}^k$ et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$. [jury : leçon 261 : propriétés qui « doivent être connues »]

11.2.b.5 [L3] $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ pour X, Y indépendantes ; $\varphi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(t) = e^{imt-\sigma^2t^2/2}$.

11.2.b.6 [L3] Processus de Galton-Watson : probabilité d'extinction, plus petit point fixe de la fonction génératrice dans $[0,1]$★. [jury : leçon 264]

Savoir-faire

11.2.b.7 [L2] Calculer rapidement les fonctions génératrices des lois discrètes usuelles et en déduire espérance et variance.

11.2.b.8 [L3] Obtenir la loi d'une somme de variables indépendantes par fonctions génératrices ou caractéristiques. [jury : leçons 264, 266]

Exemples et contre-exemples

11.2.b.9 [L3] Loi de Cauchy : $\varphi(t) = e^{-|t|}$, non dérivable en 0 ; la moyenne de n variables de Cauchy indépendantes suit encore la loi de Cauchy.

11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

11.3.a Modes de convergence

Texte officiel : Convergence en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.

Définitions

11.3.a.1 [L3] Convergence presque sûre, en probabilité, dans L^p, en loi (convergence de $\mathbb{E}f(X_n)$ pour f continue bornée, ou des fonctions de répartition en tout point de continuité de la limite).

Résultats

11.3.a.2 [L1] Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (cas fini en MPSI, discret en MP)★.

11.3.a.3 [L3] Presque sûre ⇒ en probabilité ⇒ en loi ; L^p ⇒ en probabilité ; réciproques partielles : convergence en loi vers une constante ⇒ en probabilité ; en probabilité ⇒ presque sûre pour une sous-suite ; convergence dominée★. [jury : leçon 262 : implications et réciproques partielles « doivent être connues »]

11.3.a.4 [L3] Théorème de Lévy : convergence en loi $\iff$ convergence simple des fonctions caractéristiques.

11.3.a.5 [L3] Pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$: convergence en loi $\iff$ $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ pour tout k. [jury : leçon 264]

11.3.a.6 [L3] Lemme de Slutsky. [jury : option A]

Savoir-faire

11.3.a.7 [L3] Donner des contre-exemples aux réciproques. [jury : leçon 262, rapport 2021 : « attendus par le jury »]

Exemples et contre-exemples

11.3.a.8 [L3] Sur $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue : $n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$ converge presque sûrement vers 0 mais pas dans L^1 ; les indicatrices « glissantes » d'intervalles de longueur $\to 0$ convergent dans L^1 mais en aucun point.

11.3.a.9 [L3] Si X est symétrique non nulle, $(-1)^n X$ converge en loi mais pas en probabilité.

11.3.b Théorèmes limites

Texte officiel : Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

Résultats

11.3.b.1 [L2] Loi faible des grands nombres pour une suite i.i.d. de variance finie (par Bienaymé-Tchebychev) ★.

11.3.b.2 [L3] Loi forte des grands nombres, démontrée sous une hypothèse de confort (moment d'ordre 4, Borel-Cantelli) ★ ; énoncé sous l'hypothèse L^1. [jury : leçon 262 : preuve présentable « éventuellement sous des hypothèses de confort »]

11.3.b.3 [L3] Théorème central limite pour une suite i.i.d. de variance finie $\sigma^2 > 0$: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)/\sigma \to \mathcal{N}(0,1)$ en loi ★ (théorème de Lévy).

11.3.b.4 [L3] Applications : méthode de Monte-Carlo (12.3), intervalles de confiance (11.4.c), polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass. [jury : leçon 262]

Savoir-faire

11.3.b.5 [L3] Énoncer ces théorèmes avec leurs hypothèses exactes et le mode de convergence en jeu ; connaître l'architecture des preuves. [jury : option A : résultats « indispensables » ; leçon 262, rapport 2021]

Pièges relevés par le jury

11.3.b.6 [L3] Dans le théorème central limite, normaliser par l'écart type, pas par la variance. [jury : option A]

11.4 Statistiques

11.4.a Statistique descriptive univariée

Texte officiel : Statistiques descriptives univariées : indicateurs de position et indicateurs de dispersion. Représentations graphiques de données.

Définitions

11.4.a.1 [L3] (vu au lycée) Moyenne, médiane, quantiles, mode ; variance et écart type empiriques, étendue, écart interquartile ; histogramme, boîte à moustaches, fonction de répartition empirique.

Résultats

11.4.a.2 [L3] La moyenne minimise $a \mapsto \sum (x_i - a)^2$, la médiane minimise $a \mapsto \sum |x_i - a|$ ★ ; formule de König-Huygens ; sensibilité de la moyenne aux valeurs extrêmes.

11.4.b Séries statistiques à deux variables

Texte officiel : Série statistique à deux variables quantitatives, nuage de points associé. Coefficient de corrélation. Droite de régression des moindres carrés.

Définitions

11.4.b.1 [L3] Nuage de points, point moyen, covariance empirique, coefficient de corrélation linéaire r.

Résultats

11.4.b.2 [L3] $|r| \leq 1$ (Cauchy-Schwarz), avec égalité si et seulement si les points sont alignés ★.

11.4.b.3 [L3] Droite de régression de y en x : pente $\mathrm{Cov}(x,y)/\mathrm{Var}(x)$, elle passe par le point moyen ; c'est une projection orthogonale dans $\mathbb{R}^n$ ★. [jury : leçons 148, 158 (moindres carrés)]

11.4.b.4 [L3] r^2 est la part de variance expliquée par la régression.

Exemples et contre-exemples

11.4.b.5 [L3] Les régressions de y en x et de x en y ne donnent pas la même droite (sauf si $|r| = 1$) ; une corrélation n'est pas une causalité.

11.4.c Estimation

Texte officiel : Estimation ponctuelle. Estimation par intervalle de confiance.

Définitions

11.4.c.1 [L3] Modèle statistique, échantillon, estimateur ; biais, risque quadratique, estimateur convergent ; intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$, intervalle asymptotique.

Résultats

11.4.c.2 [L3] La moyenne empirique est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance ; $\frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X}_n)^2$ est sans biais pour la variance ★.

11.4.c.3 [L3] Risque quadratique = biais^2+ variance ★.

11.4.c.4 [L3] Intervalle de confiance non asymptotique par Bienaymé-Tchebychev ; asymptotique par le théorème central limite et le lemme de Slutsky (pour une proportion : $\hat{p} \pm 1{,}96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ au niveau 95 %) ★. [jury : option A ; leçon 262]

11.4.c.5 [L3] Inégalité de Hoeffding †.

Savoir-faire

11.4.c.6 [L3] Comparer des estimateurs d'un même paramètre avec le vocabulaire adapté (biais, risque quadratique, convergence). [jury : option A]

11.4.c.7 [L3] Construire des intervalles de confiance pour les paramètres de lois de Bernoulli, de Poisson, exponentielle, géométrique. [jury : option A : ces modèles « révèlent fréquemment un manque de recul »]

Exemples et contre-exemples

11.4.c.8 [L3] Pour $\mathcal{U}([0,\theta])$, $\max_i X_i$ est un estimateur biaisé de θ, corrigé par le facteur $\frac{n+1}{n}$, de risque bien plus faible que $2\bar{X}_n$.

Pièges relevés par le jury

11.4.c.9 [L3] Ne pas confondre la pratique d'un test et la construction d'un intervalle de confiance (c'est l'intervalle qui est aléatoire, pas le paramètre). [jury : option A : « moins d'amalgames » qu'avant, mais le point reste signalé]

12 Méthodes numériques

Bilan des rapports du jury 2020–2025. À l'écrit, les méthodes numériques interviennent surtout par l'algèbre linéaire : théorème de Hadamard-Gershgorin, « explicitement au programme du concours », dont une preuve était attendue et qui n'a été correctement traité que dans un quart des copies ; norme subordonnée et convergence de A^k ; orthonormalisation de Gram-Schmidt au service de l'algorithme LLL (écrit MG 2020) ; décomposition en valeurs singulières, dont le jury souligne « la très grande utilité » grâce à « l'existence d'algorithmes de calcul performants » (écrit MG 2023). Les recommandations de l'option B précisent les attendus communs : méthode d'Euler explicite et son analyse, pivot de Gauss et décomposition LU, conditionnement, méthode de la puissance, méthode de Newton, matrice des différences finies du laplacien, erreur de la méthode des rectangles (« preuve élémentaire exigible »). Hors pivot de Gauss, interpolation de Lagrange, dichotomie et sommes de Riemann (MPSI), ce chapitre est de niveau L3.

12.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Texte officiel : Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition LU. Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel) ; analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral. Décomposition en valeurs singulières. Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien en dimension un.

Définitions

12.1.1 [L3] Conditionnement $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ pour une norme subordonnée ; rayon spectral $\rho(A)$.

12.1.2 [L3] Décomposition LU ; décomposition de Cholesky †.

12.1.3 [L3] Méthode itérative associée à $A = M - N$: $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$; Jacobi ($M = D$), Gauss-Seidel (M triangulaire inférieure de A).

12.1.4 [L3] Matrice $A_h = \frac{1}{h^2}\mathrm{tridiag}(-1, 2, -1)$ de discrétisation de $-u''$ sur $[0, 1]$ avec conditions de Dirichlet, $h = \frac{1}{n+1}$.

Résultats

12.1.5 [L3] $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ ★ ; $\mathrm{cond}(A) \geq 1$; $\mathrm{cond}_2(A) = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$, égal à $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. [jury : leçon 153, rapport 2022 : distinguer le cas des matrices autoadjointes]

12.1.6 [L3] Théorème de Hadamard-Gershgorin : les valeurs propres de A sont dans $\bigcup_i D(a_{ii}, \sum_{j\neq i}|a_{ij}|)$ ★ ; une matrice à diagonale strictement dominante est inversible. [jury : écrit MG 2020 : énoncé « pourtant au programme », preuve attendue ; leçon 144]

12.1.7 [L1] Pivot de Gauss ; coût de l'ordre de $\frac{2}{3}n^3$ opérations [L3] ; pivot partiel pour la stabilité †. [jury : leçon 162]

12.1.8 [L3] A admet une décomposition LU (L triangulaire inférieure à diagonale unité) si et seulement si ses mineurs principaux dominants sont non nuls, et elle est alors unique ★ ; décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive ★. [jury : leçons 157, 162]

12.1.9 [L3] $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme subordonnée, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une norme subordonnée avec $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$ ★ ; $A^k \to 0 \iff \rho(A) < 1$ ★ ; formule de Gelfand $\rho(A) = \lim \|A^k\|^{1/k}$ †. [jury : leçon 153 : le lien avec $X_{n+1} = AX_n$ « doit être connu »]

12.1.10 [L3] Une méthode itérative converge pour tout x_0 si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ ★ ; Jacobi et Gauss-Seidel convergent si A est à diagonale strictement dominante ★ ; Gauss-Seidel converge si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ †.

12.1.11 [L3] Décomposition en valeurs singulières (voir 4.d) ; solution des moindres carrés de norme minimale ; meilleure approximation de rang k †. [jury : leçons 148, 162]

12.1.12 [L3] Valeurs propres de A_h : $\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}$, vecteurs propres $\big(\sin(jk\pi h)\big)_j$; $A_h \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{cond}_2(A_h) \sim \frac{4}{\pi^2 h^2}$ ★. [jury : option B : à connaître pour les conditions de Dirichlet, de Neumann et périodiques]

Savoir-faire

12.1.13 [L3] Calculer des conditionnements simples et expliquer leur rôle. [jury : option B : notion « bien souvent trop imprécise »]

12.1.14 [L3] Localiser des valeurs propres par les disques de Gershgorin (appliqués aussi à ${}^tA$).

12.1.15 [L3] Écrire la matrice des différences finies pour d'autres conditions aux limites. [jury : option B]

Exemples et contre-exemples

12.1.16 [L3] La matrice de Hilbert $\big(\frac{1}{i+j-1}\big)$ est symétrique définie positive et très mal conditionnée.

Pièges relevés par le jury

12.1.17 [L3] Maîtriser les liens entre rayon spectral et normes matricielles. [jury : option B]

12.2 Méthodes itératives de résolution approchée

Texte officiel : Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance. Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés. Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

Définitions

12.2.1 [L3] Ordre et vitesse de convergence (linéaire, quadratique) ; estimations a priori et a posteriori.

12.2.2 [L3] Méthode de la puissance ; méthode du gradient à pas constant ; problème des moindres carrés ; méthode de Picard (itération de point fixe) ; méthode de Newton.

Résultats

12.2.3 [L3] Méthode de la puissance : si A est diagonalisable avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots$ et si x_0 a une composante non nulle sur la droite propre de λ_1, la direction de $A^k x_0$ tend vers cette droite et le quotient de Rayleigh vers λ_1, à la vitesse $|\lambda_2/\lambda_1|^k$ ★ ; méthode de la puissance inverse †. [jury : leçon 153 ; option B]

12.2.4 [L3] Gradient à pas constant pour $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$: convergence si et seulement si $0 < \tau < 2/\lambda_{\max}$; pas optimal $\frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$, de taux $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ avec $\kappa = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ ★. [jury : leçon 219 ; option B]

12.2.5 [L3] Moindres carrés : équations normales ${}^tAAx = {}^tAb$; résolution plus stable par QR ou par décomposition en valeurs singulières. [jury : leçons 148, 158, 162]

12.2.6 [L1] Dichotomie : erreur au plus $(b-a)/2^n$ ★.

12.2.7 [L3] Picard : si f est contractante sur un intervalle fermé stable, convergence géométrique avec estimations a priori et a posteriori ; localement, un point fixe tel que $|f'(\ell)| < 1$ est attractif ★. [jury : leçon 226]

12.2.8 [L3] Newton : si f est $\mathcal{C}^2$, $f(\ell) = 0$ et $f'(\ell) \neq 0$, convergence locale quadratique ★ ; pour f convexe croissante, convergence monotone depuis la droite de la racine ★ ; version vectorielle à jacobienne inversible ★. [jury : leçon 226 ; leçon 226, rapport 2021 : « au moins dans $\mathbb{R}^2$ » ; option B]

12.2.9 [L3] Méthode de la sécante, d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ †.

Savoir-faire

12.2.10 [L3] Estimer numériquement une vitesse de convergence (logarithme des erreurs) et choisir un critère d'arrêt.

12.2.11 [L3] Analyser la méthode de Héron $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ comme méthode de Newton. [jury : leçon 226]

Exemples et contre-exemples

12.2.12 [L3] Newton pour $x^3 - 2x + 2$ partant de 0 cycle entre 0 et 1 ; pour $x \mapsto x^{1/3}$, les itérées divergent.

12.3 Intégration numérique

Texte officiel : Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

Définitions

12.3.1 [L1] Méthode des rectangles (sommes de Riemann) ; méthodes du point milieu et des trapèzes [L3] †.

12.3.2 [L3] Estimateur de Monte-Carlo $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(U_i)$, U_i i.i.d. uniformes.

Résultats

12.3.3 [L1] Méthode des rectangles pour f de classe $\mathcal{C}^1$: erreur au plus $\frac{(b-a)^2}{2n}\|f'\|_\infty$ ★. [jury : option B : erreur à connaître, « une preuve élémentaire est exigible »]

12.3.4 [L3] Point milieu et trapèzes : erreur en $O(1/n^2)$ pour f de classe $\mathcal{C}^2$ †.

12.3.5 [L3] Monte-Carlo : estimateur sans biais, convergence presque sûre (loi forte des grands nombres), erreur de l'ordre de $\sigma/\sqrt{n}$ (théorème central limite), indépendante de la dimension, d'où son intérêt pour les intégrales multiples ★. [jury : leçon 262]

12.3.6 [L3] Techniques de réduction de variance †.

Savoir-faire

12.3.7 [L3] Construire un intervalle de confiance asymptotique pour un calcul de Monte-Carlo ; comparer le coût avec une méthode déterministe en grande dimension.

Exemples et contre-exemples

12.3.8 [L3] Approximation de π par la proportion de points uniformes de $[0,1]^2$ dans le quart de disque.

12.4 Approximation de fonctions numériques

Texte officiel : Interpolation de Lagrange : polynôme de Lagrange d'une fonction en $(n+1)$ points, estimation de l'erreur.

Définitions

12.4.1 [L1] Polynôme d'interpolation de Lagrange $L_n f$ en $n+1$ points distincts ; base de Lagrange.

12.4.2 [L3] Différences divisées (forme de Newton) † ; points de Tchebychev.

Résultats

12.4.3 [L1] Existence et unicité de $L_n f$ ★.

12.4.4 [L3] Pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$: $f(x) - L_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ ★.

12.4.5 [L3] Les points de Tchebychev minimisent $\sup_{[-1,1]}|\prod(x - x_i)|$, qui vaut alors 2^{-n} ★.

12.4.6 [L3] Phénomène de Runge : pour des points équirépartis, $L_n f$ ne converge pas uniformément vers $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1,1]$ †.

Savoir-faire

12.4.7 [L3] Calculer $L_n f$ (base de Lagrange ou différences divisées) et majorer l'erreur.

Pièges relevés par le jury

12.4.8 [L3] Ne pas confondre interpolation et approximation : les polynômes d'interpolation ne convergent pas en général vers la fonction. [jury : leçon 209, rapport 2021 : « différence fondamentale entre interpolation et approximation »]

12.5 Équations différentielles ordinaires

Texte officiel : Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

Définitions

12.5.1 [L3] Subdivision $t_n = t_0 + nh$; schéma d'Euler explicite $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$; méthode à un pas ; erreur de consistance ; consistance, stabilité, convergence, ordre.

Résultats

12.5.2 [L3] Le schéma d'Euler explicite est consistant d'ordre 1 si la solution est de classe $\mathcal{C}^2$ ★.

12.5.3 [L3] Si f est lipschitzienne en y, le schéma est stable ; consistance et stabilité entraînent la convergence, avec $\max_n |y(t_n) - y_n| \leq Ch$ (Grönwall discret) ★. [jury : option B : description des schémas d'Euler, « élément central » du programme de l'option]

12.5.4 [L3] Pour $y' = -\lambda y$ ($\lambda > 0$), Euler explicite n'est stable que si $h < 2/\lambda$; Euler implicite est inconditionnellement stable (problèmes raides) †. [jury : option B]

12.5.5 [L3] Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4 †.

Savoir-faire

12.5.6 [L3] Écrire le schéma en distinguant l'approximation y_n et la valeur exacte $y(t_n)$, et en reliant nombre de points et pas h. [jury : option B]

12.5.7 [L3] Définir rigoureusement consistance, stabilité et convergence, et les relier à la méthode étudiée. [jury : option B : notions souvent citées « sans les définir rigoureusement »]

12.5.8 [L3] Vérifier l'ordre numériquement (erreur en fonction de h en échelle logarithmique).

Exemples et contre-exemples

12.5.9 [L3] Pour $y' = y$, $y(0) = 1$ sur $[0,T]$, Euler donne $y_N = (1 + T/N)^N \to e^T$, avec une erreur en $O(1/N)$.